UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Actions de groupes, et applications.
Polyèdres réguliers et sous-groupes fini de $SO_3(\mathbb{R})$

Principales leçons concernées :

— 101 : groupes opérant sur un ensemble

— 104 : groupes finis, exemples et applications

— 105 : groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications

— 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$, applications.

— 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens, distances, isométries

— 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

— 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

I. Groupes finis d'isométries en général

Exercice 1.

Soit G un groupe fini d'isométries de l'espace affine euclidien E de dimension n.
Montrer que G a un point fixe.

Indications. G est un groupe de transformations affines. Soit $x \in E$ un point quelconque. L'isobarycentre de l'orbite de x est un point fixe de G.
De manière équivalente, le barycentre $O = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g.x$ est G-invariant.

Exercice 2.

Soit G un groupe sous-fini de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Indications. Faire agir G sur l'ensemble des produit scalaires, et noter que l'ensemble des produits scalaires est convexe. Si q est un produit scalaire quelconque, l'isobarycentre q' des translatés de q est donc encore un produit scalaire, et il est G-invariant.

II. Polyèdres réguliers et sous-groupes finis de SO(3)

Biblio : [Aud98, Ber77, CG18, Gob98]

II.1 Groupe diédral

Si on identifie le plan affine euclidien E à $\mathbb{C}$, tout n-gone régulier est isométrique à un homothétique du n-gone standard $P_n = Conv(\{e^{2ik\pi/n} | k \in [\![0, n-1]\!]\})$. Le groupe d'isométries de P_n (c'est à dire le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$ préservant P_n) s'appelle le groupe diédral D_{2n} (il a $2n$ éléments).

Le cas dégénéré $n = 2$ est le groupe d'isométries du segment $[-1, 1]$, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si n est fixé, tous les n-gones réguliers ont le même groupe d'isométries à isomorphisme près, et même à conjugaison près dans $\mathrm{Isom}(E)$ puisque tout n-gone régulier est isométrique à λP_n pour un certain $\lambda > 0$, et que P_n et λP_n ont le même groupe d'isométries.

Exercice 3.

On note $r : z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} z$ la rotation d'angle $2\pi/n$, et s la symétrie par rapport à l'axe réel $z \mapsto \bar{z}$.

(a) r, s vérifient $r^n = 1$, $s^2 = 1$, $srs = r^{-1}$ (et on peut montrer que c'est une présentation de D_{2n})

(b) D_{2n} n'est abélien que dans le cas dégénéré $n = 2$

(c) Classes de conjugaison : parmi les rotations, r est conjuguée à r^{-1} uniquement. Si n est impair, toutes les symétries sont conjuguées. Si n est pair, il y a 2 classes de conjugaison de symétries

(d) Si n est pair, $-\mathrm{id}$ est dans le centre de D_{2n} si n impair, le centre de D_{2n} est trivial.

Exercice 4.

Démontrer le théorème suivant.

Théorème. ***1.*** *Tout sous-groupe fini de $SO(2)$ est cyclique.*
2. *Tout sous-groupe fini de $O(2)$ est cyclique ou conjugué à un D_{2n}.*

Voir Proposition 6.7 dans [Gob98].

Indications.
1. Si $G \subset SO(2)$, alors G est cyclique : prendre une rotation d'angle minimal $\theta > 0$, et faire la “division euclidienne” dans $\mathbb{R}$
2. On peut supposer que G contient une symétrie σ, et est donc de cardinal $2n$. Montrer que $G \setminus SO(2)$ est formé de n symétries, d'axes faisant un angle $k\pi/n$ avec l'axe de σ.

Si $x \neq 0$ est sur l'axe de σ, montrer que $G.x$ est un polygone régulier et que G est égal au groupe des isométries de ce polygone.

Exercice 5. Goblot, Prop 6.8

Si n est impair, le sous-groupe des rotations est l'unique sous-groupe d'indice 2 de D_{2n}.

Si n est impair, D_{2n} possède 3 sous-groupes d'indice 2.

II.2 Les groupes d'isométries des polyèdres réguliers

Il y a plusieurs définitions possibles des polyèdres réguliers en dimension 3. La définition qui se généralise bien en toute dimension est la suivante.

Définition II.1 (Voir [Gob98]). *Un polytope P de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ (souvent supposé d'intérieur non vide).*

On suppose connu la notion de sommet (=point extremal), arete,... [1]

1. La définition de facette est la suivante : les facettes sont les intersection de P avec les hyperplans d'appui. Un hyperplan d'appui st par définition un hyperplan H qui recontre P et tq P est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés défini par H. La dimension d'une facette est la dimension de l'espace affine qu'elle engendre.

Définition II.2. *Un drapeau de P est la donnée d'une chaine d'inclusions sommet, arete, 2-facette, …, $n-1$-facette $F_0 \subset \dots F_{n-1}$.*

Définition II.3 (Voir [CG18, Ber77])**.** *Un polytope est régulier si son groupe d'isométries* $\mathrm{Isom}(P)$ *agit transitivement sur les drapeaux de P.*

On appellera polyèdre régulier un polytope de $\mathbb{R}^3$ d'intérieur non vide et régulier.

Remarque II.4. En dimension 3, on peut donner des définitions alternatives de polyèdre régulier. Dans [Aud98], un polyèdre est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers et si pour toute paire de sommets v, v', il y a une isométrie qui envoie les arêtes contenant v sur les arêtes contenant v'.

Dans [Gob98], un polyèdre est régulier si tous ses sommets sont contenus dans une sphère et s'il a la propriété suivante : soit d la distance minimale entre deux de ses sommets ; il existe $p \geq 3$ tel que pour tout sommet v de P, l'ensemble des sommets de P à distance exactement d de P est un p-gone régulier.

Ce n'est pas complètement évident de montrer l'équivalence de ces définitions. Voir [Gob98] qui fait des choses dans ce sens.

Exercice 6.

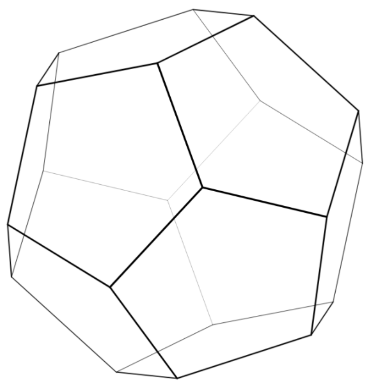
1. Pour un polyèdre régulier, montrer que :

(a) tous les sommets sont dans la même orbite. En particulier, de chaque sommet par le même nombre d'arêtes

(b) toutes les faces dont dans la même orbite. En particulier, les faces ont le même nombre de côté

(c) toutes les faces sont des polygones réguliers.

2. Trouver des exemples de polyèdres qui vérifient la condition 1,2 ou 3, mais que ne sont pas réguliers.



un dodécaèdre

Exercice 7.

Soit P le dodécaèdre régulier, et soit $g \in \mathrm{Isom}^+(P) \setminus \{\mathrm{id}\}$.

1. En comptant le nombre de drapeaux de P, calculer le cardinal de $\mathrm{Isom}(P)$ et de $\mathrm{Isom}^+(P)$.

2. Montrer que l'axe de g intersecte P en un sommet, un milieu d'arête ou un centre de face.

3. Compter le nombre de rotation de chacun des 3 types ci-dessus, et retrouver le résultat ci-dessus.

Exercice 8.

Soit P un polyèdre, et supposons que P soit invariant par $-\mathrm{id}$.

Alors $\mathrm{Isom}(P) \simeq \mathrm{Isom}^+(P) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Indications. Vérifier que id commute avec tous les éléments de $\mathrm{Isom}(P)$. Soit $\Phi : \mathrm{Isom}^+(P) \times \{\pm \mathrm{id}\} \to \mathrm{Isom}(P)$ définie par $\Phi : (g, \sigma) \mapsto g\sigma$. Vérifier que c'est bien un morphisme. Vérifier qu'il est surjectif, et injectif.

L'exercice ne s'applique donc pas au tétraèdre, et on peut se demander à quoi ressemble le groupe engendré par le groupe d'isométries du tétraèdre et $-\mathrm{id}$ (idem avec le groupes d'isométries positives du tétraèdre). Voir l'exo 9.

Exercice 9.

Si P est un tétraèdre régulier, décrire le groupe engendré par $-\mathrm{id}$ et $\mathrm{Isom}(P)$ et le groupe engendré par $-\mathrm{id}$ et $\mathrm{Isom}^+(P)$: dire à quoi ce groupe est isomorphe, et l'identifier avec un sous-groupe d'un groupe d'isométries du cube.

Indications. Si on note P^0 l'ensemble des sommets du tétraèdre, $P^0 \cup -P^0$ est un cube. Quelles sont ses grandes diagonales ?

III. Actions de groupes finis

Théorème Cayley et signature Le fait qu'un groupe G agit sur lui-même par multiplication à gauche de manière libre et transitive (et donc fidèle) donne un morphisme injectif de G dans les bijections de G. En particulier, si G est fini de cardinal n, alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n.

En composant avec le morphisme signature $sgn : S_n \to \{\pm 1\}$, on obtient un morphisme $G \to \{\pm 1\}$. Bien sûr, il se peut que ce morphisme soit trivial (si par exemple G est simple et $\neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Exercice 10.

(voir [Rom17, Exercice 2.33]). Soit G un groupe fini de cardinal n, et pour $g \in G$, σ_g la permutation de G définie par $\sigma_g(x) = gx$. Soit $\varphi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme défini par $\varphi(g) = sgn(\sigma_g)$.

1. Soit k l'ordre de g. Quelle est la décomposition en cycles de σ_g ?

2. Montrer que $\varphi(g) = -1$ ssi k est pair et $\frac{n}{k}$ est impair.

3. En déduire que φ est non-trivial si et seulement si son 2-Sylow est cyclique non-trivial.

4. En déduire qu'un groupe d'ordre $2n$ avec $n \geq 3$ impair n'est pas simple.

Le théorème de Cayley permet de plonger G dans S_n, qui lui-même se plonge dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Ce plongement permet de démontrer le thm de Sylow à partir des groupes de Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ (qui sont les conjugués du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à diagonale identité). Voir [Per95].

Probabilité de commutation dans un groupe fini

Exercice 11.

Voir Exo 2.12 : [SF14].

Théorème III.1. *Soit G un groupe fini non-abelien de cardinal N, qu'on munit de la loi de probabilité uniforme.*

Alors la probabilité p qu'une paire d'éléments commute est $p \leq 5/8$.

Autrement dit, $\frac{1}{N^2}\#\{(g,h) \in G \times G | gh = hg\} \leq 5/8$.

Etant donné $x \in G$, on note $Z_G(x) = \{g \in G | gx = xg\}$ son centralisateur et C_x sa classe de conjugaison. On note $Conj(G)$ le nombre de classes de conjugaison de G, et $Z(G)$ le centre de G.

1. Monter que si G est non-abelien, $G/Z(G)$ est de cardinal au moins 4.

2. Exprimer p en termes des centralisateurs et montrer que $p = \frac{1}{N}\sum_{x \in G} \frac{1}{\#C_x}$.

3. Déduire et que $p = \frac{Conj(G)}{N}$.

4. Soit $x_1, \ldots, x_k$ des représentants des classes de conjugaison de cardinal au moins 2. Monter que $N = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{\#Z_G(x_i)}$.

5. Conclure.

Denombrement de colliers, de coloriages du cube Un collier est un ensemble de perles colorées assemblées sur un fil circulaire. Si n est le nombre de perles du collier, et c le nombre de couleurs des perles, on formalise un collier comme une application de $U_n \to [\![1, c]\!]$ où $U_n \subset \mathbb{C}$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 12.

[Ale99, p.22]

Si on considère comme identiques deux colliers qui diffèrent par rotation, combien colliers différents peut-on construire avec n perles et c couleurs ? On note $Coll_{n,c}$ ce nombre.

1. Ramener le problème à compter le nombre d'orbites de l'action de U_n sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions $U_n \to [\![\{]\!]1, c\}$.

2. Utiliser la formule de Burnside pour reformuler ce problème et montrer que $Coll_{n,c} = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d) c^{n/d}$

3. Même question si on considère identiques deux colliers qui diffèrent par une isométrie pouvant renverser l'orientation (on pourra distinguer le cas n pair et impair).

Indications. $Coll_{n,c} = \frac{1}{n}\sum_{g \in U_n} \#\mathrm{Fix} g$, et partitionner en fonction de l'ordre de g.

Exercice 13. Colorier un cube

[Ale99, p.23] De combien de façons peut-on colorier un cube avec 3 couleurs, si on considère comme identiques deux coloriages se déduisant l'un de l'autre par rotation.

Indications. Utiliser la formule de Burnside comme dans l'exo précédent en comptant le nombre de coloriages fixes par les divers types de rotation (sans oublier l'identité).

Réponse : 57.

Références

[Ale99] Michel Alessandri. *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique.* Agrégation de mathématiques. Dunod, Paris, 1999.

[Aud98] Michèle Audin. *Géométrie.* Paris : Belin ; Montpellier : Espaces 34, 1998.

[Ber77] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 2.* CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, 1977. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères. [Euclidian spaces, triangles, circles and spheres].

[CG18] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 2*, volume 122 of *Math. Devenir.* Paris : Calvage et Mounet, 2nd edition edition, 2018.

[Gob98] Rémi Goblot. *Thèmes de géométrie (agrégation de mathématiques).* Masson, 1998.

[Per95] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* CAPES-AGREG mathématiques. Ellipses, Paris, 1995.

[Rom17] J.É. Rombaldi. *Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre & géométrie.* LMD MATHS. De Boeck supérieur, 2017.

[SF14] S. Nicolas S. Francinou, H. Gianella. *Oraux X-ENS, algèbre 1.* Cassini, 2014.