



**Actions de groupes, et applications.  
Polyèdres réguliers et sous-groupes fini de  $SO_3(\mathbb{R})$**

Principales leçons concernées :

- 101 : groupes opérant sur un ensemble
- 104 : groupes finis, exemples et applications
- 105 : groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications
- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ , applications.
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens, distances, isométries
- 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

## I. Groupes finis d'isométries en général

### Exercice 1.

Soit  $G$  un groupe fini d'isométries de l'espace affine euclidien  $E$  de dimension  $n$ .  
Montrer que  $G$  a un point fixe.

**Indications.**  $G$  est un groupe de transformations affines. Soit  $x \in E$  un point quelconque. L'isobarycentre de l'orbite de  $x$  est un point fixe de  $G$ .

De manière équivalente, le barycentre  $O = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g.x$  est  $G$ -invariant.

### Exercice 2.

Soit  $G$  un groupe sous-fini de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $G$  est conjugué à un sous-groupe de  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Indications.** Faire agir  $G$  sur l'ensemble des produit scalaires, et noter que l'ensemble des produits scalaires est convexe. Si  $q$  est un produit scalaire quelconque, l'isobarycentre  $q'$  des translatés de  $q$  est donc encore un produit scalaire, et il est  $G$ -invariant.

## II. Polyèdres réguliers et sous-groupes finis de $SO(3)$

Biblio : [Aud98, Ber77, CG18, Gob98]

### II.1 Groupe diédral

Si on identifie le plan affine euclidien  $E$  à  $\mathbb{C}$ , tout  $n$ -gone régulier est isométrique à un homothétique du  $n$ -gone standard  $P_n = \text{Conv}(\{e^{2ik\pi/n} | k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\})$ . Le groupe d'isométries de  $P_n$  (c'est à dire le sous-groupe de  $\text{Isom}(E)$  préservant  $P_n$ ) s'appelle le groupe diédral  $D_{2n}$  (il a  $2n$  éléments).

Le cas dégénéré  $n = 2$  est le groupe d'isométries du segment  $[-1, 1]$ , isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Si  $n$  est fixé, tous les  $n$ -gones réguliers ont le même groupe d'isométries à isomorphisme près, et même à conjugaison près dans  $\text{Isom}(E)$  puisque tout  $n$ -gone régulier est isométrique à  $\lambda P_n$  pour un certain  $\lambda > 0$ , et que  $P_n$  et  $\lambda P_n$  ont le même groupe d'isométries.

### Exercice 3.

On note  $r : z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} z$  la rotation d'angle  $2\pi/n$ , et  $s$  la symétrie par rapport à l'axe réel  $z \mapsto \bar{z}$ .

- $r, s$  vérifient  $r^n = 1$ ,  $s^2 = 1$ ,  $srs = r^{-1}$  (et on peut montrer que c'est une présentation de  $D_{2n}$ )
- $D_{2n}$  n'est abélien que dans le cas dégénéré  $n = 2$
- Classes de conjugaison : parmi les rotations,  $r$  est conjuguée à  $r^{-1}$  uniquement. Si  $n$  est impair, toutes les symétries sont conjuguées. Si  $n$  est pair, il y a 2 classes de conjugaison de symétries
- Si  $n$  est pair,  $-\text{id}$  est dans le centre de  $D_{2n}$  si  $n$  impair, le centre de  $D_{2n}$  est trivial.

### Exercice 4.

Démontrer le théorème suivant.

**Théorème. 1.** *Tout sous-groupe fini de  $SO(2)$  est cyclique.*  
**2.** *Tout sous-groupe fini de  $O(2)$  est cyclique ou conjugué à un  $D_{2n}$ .*

Voir Proposition 6.7 dans [Gob98].

#### Indications.

- Si  $G \subset SO(2)$ , alors  $G$  est cyclique : prendre une rotation d'angle minimal  $\theta > 0$ , et faire la "division euclidienne" dans  $\mathbb{R}$
- On peut supposer que  $G$  contient une symétrie  $\sigma$ , et est donc de cardinal  $2n$ . Montrer que  $G \setminus SO(2)$  est formé de  $n$  symétries, d'axes faisant un angle  $k\pi/n$  avec l'axe de  $\sigma$ .  
 Si  $x \neq 0$  est sur l'axe de  $\sigma$ , montrer que  $G.x$  est un polygone régulier et que  $G$  est égal au groupe des isométries de ce polygone.

### Exercice 5. Goblot, Prop 6.8

Si  $n$  est impair, le sous-groupe des rotations est l'unique sous-groupe d'indice 2 de  $D_{2n}$ .

Si  $n$  est pair,  $D_{2n}$  possède 3 sous-groupes d'indice 2.

## II.2 Les groupes d'isométries des polyèdres réguliers

Il y a plusieurs définitions possibles des polyèdres réguliers en dimension 3. La définition qui se généralise bien en toute dimension est la suivante.

**Définition II.1** (Voir [Gob98]). *Un polytope  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^n$  (souvent supposé d'intérieur non vide).*

On suppose connu la notion de sommet (=point extremal), arete,...<sup>1</sup>

1. La définition de facette est la suivante : les facettes sont les intersection de  $P$  avec les hyperplans d'appui. Un hyperplan d'appui est par définition un hyperplan  $H$  qui rencontre  $P$  et tq  $P$  est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés défini par  $H$ . La dimension d'une facette est la dimension de l'espace affine qu'elle engendre.

**Définition II.2.** Un drapeau de  $P$  est la donnée d'une chaîne d'inclusions sommet, arête, 2-facette, ...,  $n - 1$ -facette  $F_0 \subset \dots \subset F_{n-1}$ .

**Définition II.3** (Voir [CG18, Ber77]). Un polytope est régulier si son groupe d'isométries  $\text{Isom}(P)$  agit transitivement sur les drapeaux de  $P$ .

On appellera polyèdre régulier un polytope de  $\mathbb{R}^3$  d'intérieur non vide et régulier.

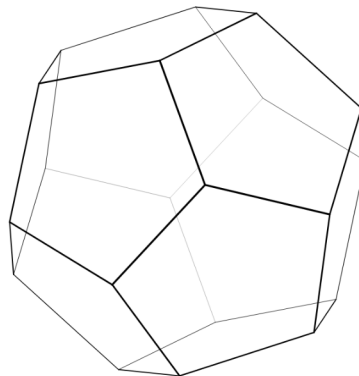
*Remarque II.4.* En dimension 3, on peut donner des définitions alternatives de polyèdre régulier. Dans [Aud98], un polyèdre est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers et si pour toute paire de sommets  $v, v'$ , il y a une isométrie qui envoie les arêtes contenant  $v$  sur les arêtes contenant  $v'$ .

Dans [Gob98], un polyèdre est régulier si tous ses sommets sont contenus dans une sphère et s'il a la propriété suivante : soit  $d$  la distance minimale entre deux de ses sommets ; il existe  $p \geq 3$  tel que pour tout sommet  $v$  de  $P$ , l'ensemble des sommets de  $P$  à distance exactement  $d$  de  $P$  est un  $p$ -gone régulier.

Ce n'est pas complètement évident de montrer l'équivalence de ces définitions. Voir [Gob98] qui fait des choses dans ce sens.

### Exercice 6.

1. Pour un polyèdre régulier, montrer que :
  - (a) tous les sommets sont dans la même orbite. En particulier, de chaque sommet par le même nombre d'arêtes
  - (b) toutes les faces sont dans la même orbite. En particulier, les faces ont le même nombre de côtés
  - (c) toutes les faces sont des polygones réguliers.
2. Trouver des exemples de polyèdres qui vérifient la condition 1, 2 ou 3, mais qui ne sont pas réguliers.



un dodécaèdre

### Exercice 7.

Soit  $P$  le dodécaèdre régulier, et soit  $g \in \text{Isom}^+(P) \setminus \{\text{id}\}$ .

1. En comptant le nombre de drapeaux de  $P$ , calculer le cardinal de  $\text{Isom}(P)$  et de  $\text{Isom}^+(P)$ .
2. Montrer que l'axe de  $g$  intersecte  $P$  en un sommet, un milieu d'arête ou un centre de face.
3. Compter le nombre de rotations de chacun des 3 types ci-dessus, et retrouver le résultat ci-dessus.

### Exercice 8.

Soit  $P$  un polyèdre, et supposons que  $P$  soit invariant par  $-\text{id}$ .

Alors  $\text{Isom}(P) \simeq \text{Isom}^+(P) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Indications.** Vérifier que  $\text{id}$  commute avec tous les éléments de  $\text{Isom}(P)$ . Soit  $\Phi : \text{Isom}^+(P) \times \{\pm \text{id}\} \rightarrow \text{Isom}(P)$  définie par  $\Phi : (g, \sigma) \mapsto g\sigma$ . Vérifier que c'est bien un morphisme. Vérifier qu'il est surjectif, et injectif.

L'exercice ne s'applique donc pas au tétraèdre, et on peut se demander à quoi ressemble le groupe engendré par le groupe d'isométries du tétraèdre et  $-\text{id}$  (idem avec le groupes d'isométries positives du tétraèdre). Voir l'exo 9.

### Exercice 9.

Si  $P$  est un tétraèdre régulier, décrire le groupe engendré par  $-\text{id}$  et  $\text{Isom}(P)$  et le groupe engendré par  $-\text{id}$  et  $\text{Isom}^+(P)$  : dire à quoi ce groupe est isomorphe, et l'identifier avec un sous-groupe d'un groupe d'isométries du cube.

**Indications.** Si on note  $P^0$  l'ensemble des sommets du tétraèdre,  $P^0 \cup -P^0$  est un cube. Quelles sont ses grandes diagonales ?

## III. Actions de groupes finis

**Théorème Cayley et signature** Le fait qu'un groupe  $G$  agit sur lui-même par multiplication à gauche de manière libre et transitive (et donc fidèle) donne un morphisme injectif de  $G$  dans les bijections de  $G$ . En particulier, si  $G$  est fini de cardinal  $n$ , alors  $G$  est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique  $S_n$ .

En composant avec le morphisme signature  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ , on obtient un morphisme  $G \rightarrow \{\pm 1\}$ . Bien sûr, il se peut que ce morphisme soit trivial (si par exemple  $G$  est simple et  $\neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).

### Exercice 10.

(voir [Rom17, Exercice 2.33]). Soit  $G$  un groupe fini de cardinal  $n$ , et pour  $g \in G$ ,  $\sigma_g$  la permutation de  $G$  définie par  $\sigma_g(x) = gx$ . Soit  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  le morphisme défini par  $\varphi(g) = \text{sgn}(\sigma_g)$ .

1. Soit  $k$  l'ordre de  $g$ . Quelle est la décomposition en cycles de  $\sigma_g$  ?
2. Montrer que  $\varphi(g) = -1$  ssi  $k$  est pair et  $\frac{n}{k}$  est impair.
3. En déduire que  $\varphi$  est non-trivial si et seulement si son 2-Sylow est cyclique non-trivial.
4. En déduire qu'un groupe d'ordre  $2n$  avec  $n \geq 3$  impair n'est pas simple.

Le théorème de Cayley permet de plonger  $G$  dans  $S_n$ , qui lui-même se plonge dans  $GL_n(\mathbb{F}_p)$ . Ce plongement permet de démontrer le thm de Sylow à partir des groupes de Sylow de  $GL_n(\mathbb{F}_p)$  (qui sont les conjugués du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à diagonale identité). Voir [Per95].

## Probabilité de commutation dans un groupe fini

### Exercice 11.

Voir Exo 2.12 : [SF14].

**Théorème III.1.** Soit  $G$  un groupe fini non-abelien de cardinal  $N$ , qu'on munit de la loi de probabilité uniforme.

Alors la probabilité  $p$  qu'une paire d'éléments commute est  $p \leq 5/8$ .

Autrement dit,  $\frac{1}{N^2} \#\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\} \leq 5/8$ .

Etant donné  $x \in G$ , on note  $Z_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$  son centralisateur et  $C_x$  sa classe de conjugaison. On note  $Conj(G)$  le nombre de classes de conjugaison de  $G$ , et  $Z(G)$  le centre de  $G$ .

1. Montrer que si  $G$  est non-abelien,  $G/Z(G)$  est de cardinal au moins 4.
2. Exprimer  $p$  en termes des centralisateurs et montrer que  $p = \frac{1}{N} \sum_{x \in G} \frac{1}{\#C_x}$ .
3. Dédurre et que  $p = \frac{Conj(G)}{N}$ .
4. Soit  $x_1, \dots, x_k$  des représentants des classes de conjugaison de cardinal au moins 2. Montrer que  $N = \#Z(G) + \sum_{i=1}^k \frac{N}{\#Z_G(x_i)}$ .
5. Conclure.

**Denombrement de colliers, de coloriages du cube** Un collier est un ensemble de perles colorées assemblées sur un fil circulaire. Si  $n$  est le nombre de perles du collier, et  $c$  le nombre de couleurs des perles, on formalise un collier comme une application de  $U_n \rightarrow \llbracket 1, c \rrbracket$  où  $U_n \subset \mathbb{C}$  est l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

### Exercice 12.

[Ale99, p.22]

Si on considère comme identiques deux colliers qui diffèrent par rotation, combien de colliers différents peut-on construire avec  $n$  perles et  $c$  couleurs? On note  $Coll_{n,c}$  ce nombre.

1. Ramener le problème à compter le nombre d'orbites de l'action de  $U_n$  sur l'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions  $U_n \rightarrow \llbracket 1, c \rrbracket$ .
2. Utiliser la formule de Burnside pour reformuler ce problème et montrer que  $Coll_{n,c} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d) c^{n/d}$ .
3. Même question si on considère identiques deux colliers qui diffèrent par une isométrie pouvant renverser l'orientation (on pourra distinguer le cas  $n$  pair et impair).

**Indications.**  $Coll_{n,c} = \frac{1}{n} \sum_{g \in U_n} \#\text{Fix}g$ , et partitionner en fonction de l'ordre de  $g$ .

### Exercice 13. Colorier un cube

[Ale99, p.23] De combien de façons peut-on colorier un cube avec 3 couleurs, si on considère comme identiques deux coloriages se déduisant l'un de l'autre par rotation.

**Indications.** Utiliser la formule de Burnside comme dans l'exo précédent en comptant le nombre de coloriages fixes par les divers types de rotation (sans oublier l'identité).

Réponse : 57.

## Références

- [Ale99] Michel Alessandri. *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique*. Agrégation de mathématiques. Dunod, Paris, 1999.
- [Aud98] Michèle Audin. *Géométrie*. Paris : Belin ; Montpellier : Espaces 34, 1998.

- [Ber77] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 2*. CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, 1977. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères. [Euclidian spaces, triangles, circles and spheres].
- [CG18] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 2*, volume 122 of *Math. Devenir*. Paris : Calvage et Mounet, 2nd edition edition, 2018.
- [Gob98] Rémi Goblot. *Thèmes de géométrie (agrégation de mathématiques)*. Masson, 1998.
- [Per95] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre. CAPES-AGREG mathématiques*. Ellipses, Paris, 1995.
- [Rom17] J.É. Rombaldi. *Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre & géométrie*. LMD MATHS. De Boeck supérieur, 2017.
- [SF14] S. Nicolas S. Francinou, H. Gianella. *Oraux X-ENS, algèbre 1*. Cassini, 2014.