

**G-EXTENSIONS DE SYSTÈMES DYNAMIQUES
EN MESURE INFINIE**

II

**EXEMPLES D'EXTENSIONS RÉGULIÈRES
ET NON RÉGULIÈRE.**

JEAN-PIERRE CONZE (UNIVERSITÉ DE RENNES)

ST JACUT
22-25 JUIN 2026

CONTENTS

1. Fractions continues	1
1.1. Rappels sur les fractions continues	1
1.2. Conditions sur les quotients partiels a_n	2
2. Conditions diophantiennes et ergodicité	3
2.1. Cas de réduction à un cobord	3
3. Un exemple simple d'extension ergodique	6
4. Equation de quasi-cobord et cocycle non régulier	8
4.1. Un exemple de cocycle en escalier non régulier	10
5. $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$-cocycles au-dessus de systèmes hyperboliques ($d = 1, 2$)	12
5.1. Question	12
5.2. Espaces de fonctions sur M	13
6. Valeurs essentielles et $\mathbb{Z}$-accessibilité	15
7. Annexe: démonstrations	16
8. Références	27
References	27

1. Fractions continues

1.1. Rappels sur les fractions continues. Quelques rappels sur les fractions continues.

La partie fractionnaire de $u \in \mathbb{R}$ est $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$, où $\lfloor u \rfloor$ est la partie entière de u . Pour $u \in \mathbb{R}$, la distance de u à $\mathbb{Z}$ est $\|u\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |u - n| = \min(\{u\}, 1 - \{u\})$. La fonction $u \rightarrow \|u\|$ est sous-additive et $d(u, v) = \|u - v\|$ définit une distance sur $\mathbb{T}$.

On a $0 \leq \|u\| \leq \frac{1}{2}$ et pour tout entier K , $\|Ku\| \leq |K|\|u\|$, avec égalité si $\|u\| < \frac{1}{2K}$.

Soient α un irrationnel dans $]0, 1[$. Son développement en fraction continue est noté $[0; a_1, \dots, a_n, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$, avec $a_n \geq 1$. Les a_n sont appelés quotients partiels de α .

Les entiers p_n et q_n (appelés numérateurs et dénominateurs de α) sont définis à partir des a_n par les relations $p_{-1} = 1$, $p_0 = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$(1) \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad (-1)^n = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}.$$

Ils vérifient les relations et inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|q_n \alpha\| &= (-1)^n \theta_n, \text{ avec } \theta_n = q_n \alpha - p_n, \text{ soit } \alpha = \frac{p_n}{q_n} + \frac{\theta_n}{q_n}, \\ (2) \quad 1 &= q_n \|q_{n+1} \alpha\| + q_{n+1} \|q_n \alpha\|, \\ (3) \quad \frac{1}{q_{n+1} + q_n} &\leq \|q_n \alpha\| = |\theta_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \\ (4) \quad \frac{1}{2q_n} &\leq \frac{1}{q_n + q_{n-1}} \leq \|q_{n-1} \alpha\| \leq \|\ell \alpha\|, \text{ pour } 0 < |\ell| < q_n, \\ (5) \quad \frac{1}{a_{n+1} + 2} &\leq q_n \|q_n \alpha\| = q_n |\theta_n| < \frac{q_n}{q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}, \\ &|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \end{aligned}$$

1.2. Conditions sur les quotients partiels a_n . Les propriétés des extensions par une fonction φ au-dessus d'une transformation T résultent du comportement asymptotique des sommes ergodiques $S_n \varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j$. Quand φ est centrée, ces sommes pour les rotations peuvent avoir une croissance lente, comme nous allons le voir pour les rotations en dimension 1.

Pour obtenir une majoration des sommes ergodiques basée sur les inégalités précédentes, nous aurons besoin d'une information de majoration sur la suite (a_n) du développement de α en fraction continue.

Introduisons des conditions de majoration sur (a_n) de force décroissante.

1) Si la suite (a_n) est bornée, α est dit à quotients partiels bornés (ou de *type borné*).

Un nombre α est dit *mal approché* (par les rationnels) si

$$(6) \quad \exists c > 0 : \|k\alpha\| \geq \frac{c}{|k|}, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Cette propriété équivaut pour α à être à quotients partiels bornés. En effet (6) et (3) impliquent $\inf_n q_n \|q_n \alpha\| \geq c > 0$ et $q_{n+1} \leq c^{-1} q_n$; d'où $a_{n+1} \leq c^{-1}$.

Inversement, supposons qu'on ait $a_n \leq A$, pour tout $n \geq 1$. Soit $k \geq 1$. Il existe n tel que $q_n \leq k < q_{n+1}$, d'où par (4) $\|k\alpha\| \geq \|q_n \alpha\| \geq \frac{1}{q_{n+1} + q_n} \geq \frac{1}{(A+2)q_n} \geq \frac{1}{A+2} \frac{1}{k}$.

On note Bad (Badly approximable) l'ensemble des nombres mal approchés (autrement dit de type borné).

Les nombres quadratiques ont un développement en fraction continue ultimement périodique, d'après le théorème de Lagrange. Ils sont donc dans Bad . On montre que l'ensemble Bad est de mesure de Lebesgue nulle et de dimension de Hausdorff 1.

L'ensemble $\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ des nombres mal approximables par rapport à un θ irrationnel est défini par:

$$\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) = \{x \in [0, 1] : \exists c(x) > 0 : \|k\theta - x\| \geq \frac{c(x)}{|k|}, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

On remarque que $0 \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ est équivalent à $\theta \in \text{Bad}$. Si $\theta \in \text{Bad}$, pour tout rationnel r/s , les inégalités $\frac{c}{|sk|} \leq \|sk\theta\| = \|s(k\theta - r/s)\| \leq |s| \|k\theta - r/s\|$ montrent que $r/s \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$.

L'ensemble $\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ est de mesure 0, mais sa dimension de Hausdorff $\dim_H \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ est égale à 1.

Plus généralement, l'ensemble des n -uplets $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ tels que $\beta_j - \beta_i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$, $\forall i, j, i \neq j$, a une dimension de Hausdorff égale à n .

2. Conditions diophantiennes et ergodicité

2.1. Cas de réduction à un cobord. Type d'un irrationnel

Rappelons également que le type (ou exposant diophantien) η d'un nombre irrationnel α est la borne supérieure des nombres réels η_1 tels que $\inf_{k \geq 1} k^{\eta_1} \|k\alpha\| = 0$. Si η est fini, alors

$$(7) \quad \inf_{k \geq 1} [k^{\eta-\varepsilon} \|k\alpha\|] = 0, \quad \inf_{k \geq 1} [k^{\eta+\varepsilon} \|k\alpha\|] > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Le théorème de Dirichlet montre que tout nombre irrationnel est de type ≥ 1 . Le type des nombres dans Bad (nombres mal approchés par les rationnels) est 1.

Si α n'est pas de type 1, il existe un entier $r > 1$ tel que $k^{1+1/r} \|k\alpha\| \leq 1$ pour une infinité de k . Pour chaque $r > 1$, l'ensemble des α satisfaisant cette dernière propriété est négligeable d'après le lemme de Borel-Cantelli. Ceci implique que le type de presque tout α est 1.

Analyse de Fourier et réduction à un cobord

Soit (φ_n) un cocycle récurrent à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ au-dessus d'une rotation $x \rightarrow x + \alpha$ sur $\mathbb{T}^\rho$. Une première obstruction à l'ergodicité se produit lorsqu'une composante φ^i de la fonction φ engendrant le cocycle est un cobord ($\varphi^i = \psi - T_\alpha \psi$ p.p. pour une fonction mesurable $\psi : \mathbb{T}^\rho \rightarrow \mathbb{R}$). En effet, dans ce cas, les fonctions de la forme $(x, u) \mapsto g(u^i + \psi(x))$ sont $\tilde{T}_\alpha$ -invariantes.

Plaçons-nous en dimension $\rho = 1$. La réduction d'une fonction à un cobord peut être obtenue sous des conditions portant sur la décroissance de ses coefficients de Fourier et sur le type de α à l'aide du lemme suivant :

Lemma 2.1 (2.1). *Si α est de type η , on a, pour tout $\delta > 0$, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\eta+\delta}} \frac{1}{\|k\alpha\|} < \infty$.*

Proof. Rappelons que le type η d'un irrationnel est toujours ≥ 1 . Pour $i \geq 1$, soit S_i la suite strictement croissante $(k_{i,j})_{j \geq 1}$ telle que $\|k_{i,j}\alpha\| \in [2^{-(i+1)}, 2^{-i}[$. Posons $K_i = \min_j \{k_{i,1}, k_{i,j+1} - k_{i,j}\}$.

Soit $0 < \varepsilon < \delta$. D'après (7), il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que :

$$\frac{C(\varepsilon)}{k_{i,1}^{\eta+\varepsilon}} \leq \|k_{i,1}\alpha\| < 2^{-i}, \quad \frac{C(\varepsilon)}{(k_{i,j+1} - k_{i,j})^{\eta+\varepsilon}} \leq \|(k_{i,j+1} - k_{i,j})\alpha\| < 2^{-(i-1)}$$

et donc $K_i \geq (C(\varepsilon)2^{i-1})^{\frac{1}{\eta+\varepsilon}}$.

Nous avons $k_{i,j} \geq jK_i, \forall j \geq 1$, ce qui implique, pour une constante $D(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S_i} \frac{1}{k^{\eta+\delta}} \frac{1}{\|k\alpha\|} &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{k_{i,j}^{\eta+\delta}} \frac{1}{\|k_{i,j}\alpha\|} \leq \sum_{j \geq 1} \frac{2^{i+1}}{(jK_i)^{\eta+\delta}} \\ &= \frac{2^{i+1}}{K_i^{\eta+\delta}} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^{\eta+\delta}} \leq D(\varepsilon) 2^{i(1-\frac{\eta+\delta}{\eta+\varepsilon})}; \end{aligned}$$

d'où la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\eta+\delta}} \frac{1}{\|k\alpha\|}$. □

Proposition 2.2 (2.2 Condition diophantienne + régularité = cobord). *Si α est de type η et si $\varphi(x) = \sum_{n \neq 0} c_n(\varphi) e^{2\pi i n x}$ est tel que $c_n(\varphi) = O(n^{-(\eta+\delta)})$ pour un $\delta > 0$, alors φ est un cobord : $\varphi = T_\alpha \psi - \psi$, avec ψ continue.*

Proof. Les coefficients de Fourier d'une solution intégrable ψ de l'équation de cobord $\varphi = T_\alpha \psi - \psi$ sont donnés par : $c_n(\psi) = \frac{c_n(\varphi)}{e^{2\pi i n \alpha} - 1}$. La convergence pose un problème de "petits dénominateurs". D'après le lemme 2.1, on a :

$$\sum_{n \neq 0} |c_n(\psi)| \leq \sum_{n \neq 0} \frac{|c_n(\varphi)|}{\|n\alpha\|} \leq C \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^{\eta+\delta}} \frac{1}{\|n\alpha\|} < +\infty.$$

La solution formelle de l'équation de cobord est donc une fonction continue. $\square$

Par exemple, $\varphi : x \rightarrow x(1-x) - \frac{1}{6}$ coïncide sur $[0, 1]$ avec la fonction continue, 1-périodique et 1-lipschitzienne, centrée sur $[0, 1]$, de série de Fourier :

$$\frac{-1}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}.$$

Si α est un nombre irrationnel de type < 2 , cette fonction φ est donc un cobord pour la rotation T_α et la $\mathbb{R}$ -extension par la fonction φ n'est pas ergodique.

De même, pour toute fonction φ de classe $C^{1+\delta}$ pour un $\delta > 0$ sur $\mathbb{T}$, pour presque tout nombre irrationnel α , la fonction φ est un cobord pour la rotation T_α , d'après la proposition précédente et le fait que presque tout irrationnel est de type 1.

Néanmoins, les cocycles (T_α, φ) avec φ telle que $x(1-x) - \frac{1}{6}$ peuvent être ergodiques pour des α admettant des approximations rapides par les rationnels.

Réduction à des fonctions simples

Nous noterons σ la fonction (en dents de scie) 1-périodique définie par $\sigma(x) := \{x\} - \frac{1}{2}$.

Dans l'étude des cocycles (φ_n) engendrés par une fonction φ sur le cercle au-dessus d'une rotation à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, il est raisonnable d'imposer à φ une certaine régularité de ses composantes φ^i .

Etant donnés $0 < \delta \leq 1$ et $D \geq 1$, nous désignerons par $C_{loc,D}^{1,\delta}$ l'espace des fonctions φ de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $J(\varphi) = \{t_1, t_2, \dots, t_D\}$ tel que $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_D < t_{D+1} := 1$ et pour tout j la restriction de φ à $]t_j, t_{j+1}[$ a une dérivée δ -höldérienne.

Pour $\varphi \in C_{loc,D}^{1,\delta}$ on a donc φ' bornée, ce qui entraîne que φ est lipschitzienne sur $]t_j, t_{j+1}[$, d'où l'existence des limites $\varphi(t_j^-) := \lim_{x \rightarrow t_j^-} \varphi(x)$, $\varphi(t_j^+) := \lim_{x \rightarrow t_j^+} \varphi(x)$ pour tout $t_j \in J$. On convient que $\varphi(t_1^-) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t)$.

On note $s_j(\varphi) = s_j := \varphi(t_j^+) - \varphi(t_j^-)$ le saut de φ en t_j . Les points de discontinuité de φ sont les t_j tels que $\varphi(t_j^+) - \varphi(t_j^-) \neq 0$. Le saut de σ est -1 en 0 (quand on traverse 0 en parcourant le cercle dans le sens trigonométrique).

Sous une hypothèse diophantienne sur α , la proposition 2.3 qui suit permet de ramener l'étude de (φ_n) , si φ a ses composantes dans l'espace introduit plus haut, à celle d'un cocycle engendré par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $\sigma(x - t_i)$.

Proposition 2.3 (2.3) (Réduction à des fonctions “dents de scie”). *Soit φ une fonction d'intégrale nulle appartenant à l'espace $C_{loc,D}^{1,\delta}$, $\delta > 0$. Si α est de type $< 1 + \delta$, il existe $\varphi^{(\alpha)} \in C(\mathbb{T})$ telle que*

$$(8) \quad \varphi(x) = - \sum_{j=1}^D s_j(\varphi) \sigma(x - t_j) + \varphi^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x + \alpha), \forall x \notin J.$$

On est ainsi conduit à considérer deux cas de figure très différents:

1)) *Somme des sauts nulle*: Si $\sum_{j=1}^D s_j = 0$, la formule (8) peut s'écrire

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^D s_j [\sigma(x - t_j) - \sigma(x)] + \varphi^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x + \alpha).$$

Comme $\sigma(x - t_j) - \sigma(x) = 1_{[0, t_j[} - t_j$, la fonction φ est alors cohomologue à une fonction en escalier avec D discontinuités. Toute fonction en escalier ayant un nombre fini de discontinuités a une somme de sauts nulle.

La régularité, ou la non régularité, dépend de conditions diophantiennes sur le couple $(\alpha, \text{discontinuités})$.

Nous allons illustrer le rôle crucial du choix des discontinuités dans l'ergodicité, en construisant deux exemples simples de fonctions en escalier engendrant l'un un cocycle ergodique, l'autre un cocycle non régulier.

2) *Somme des sauts non nulle*: Si $\sum_{j=1}^D s_j \neq 0$,

Pour des rotations bi-dimensionnelles sous une hypothèse analogue à la condition de "somme des sauts non nulle" l'ergodicité peut être montrée (voir exposé 3).

3. Un exemple simple d'extension ergodique

Un exemple de $\mathbb{Z}$ -extension ergodique au-dessus d'une rotation

Pour montrer l'ergodicité de certaines extensions, nous utiliserons le résultat auxiliaire suivant.

Lemma 3.1 (7.2). *Soit (φ_n) un cocycle récurrent à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ au-dessus d'un système ergodique (X, μ, T) . Soit $c \in \mathbb{R}^d$. S'il existe $\delta > 0$ et des suites $(\ell_n)_{n \geq 1}$, $(\varepsilon_n > 0)_{n \geq 1}$, avec $\lim_n \varepsilon_n = 0$, vérifiant*

$$(9) \quad \lim_n T^{\ell_n} x = x, \forall x \in M \text{ et } \mu(\{x : d(\varphi_{\ell_n}(x), c) < \varepsilon_n\}) \geq \delta, \forall n \geq 1,$$

alors c est une valeur essentielle du cocycle.

La suite (ℓ_n) de l'énoncé est appelée "suite de rigidité" de la transformation T . Toute sous-suite de la suite $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\alpha)$ des dénominateurs (q_n) de α est une suite de rigidité de la rotation $x \mapsto x + \alpha \bmod 1$.

Commençons par un exemple simple. Soit ξ la fonction en escalier

$$(10) \quad \xi := 1_{[0, \frac{1}{2}[} - 1_{[\frac{1}{2}, 1[}.$$

Considérons la $\mathbb{Z}$ -extension $\tilde{T}_{\alpha, \xi}$ définie par ξ au-dessus d'une rotation $T_\alpha : x \rightarrow x + \alpha \bmod 1$ de $\mathbb{T}$, α irrationnel.

Pour montrer l'ergodicité de l'extension, dans ce cas très particulier nous utiliserons les propriétés suivantes de la suite $\mathcal{Q}$ des dénominateurs de α , satisfaites par tout irrationnel α .

Lemma 3.2 (3.2). *1) étant donnés deux éléments consécutifs dans $\mathcal{Q}$, au moins l'un des deux vérifie : $q\|q\alpha\| < \frac{1}{2}$.*

2) étant donnés quatre éléments consécutifs dans $\mathcal{Q}$, au moins l'un des quatre est impair et satisfait : $q\|q\alpha\| < \frac{1}{2}$.

Proof. 1) Soit $\delta_n = \frac{1}{2} - q_n\|q_n\alpha\|$. D'après l'équation (2), on a $(q_{n+1} - q_n)^2 = 2\delta_n q_{n+1}^2 + 2\delta_{n+1} q_n^2$. Par conséquent, δ_n et δ_{n+1} ne peuvent pas être simultanément négatifs

2) Deux dénominateurs consécutifs ne pouvant être pairs, puisqu'ils sont premiers entre eux, les parités a priori possibles pour quatre éléments consécutifs dans $\mathcal{Q}$ sont

$$\begin{array}{cccc} (0, 1, 0, 1) & (0, 1, 1, 0) & (1, 0, 1, 0) & (0, 1, 1, 1) \\ (1, 0, 1, 1) & (1, 1, 0, 1) & (1, 1, 1, 0) & (1, 1, 1, 1). \end{array}$$

S'il y a deux dénominateurs impairs consécutifs, alors l'énoncé découle de 1).

Pour un quadruplet de dénominateurs consécutifs $(q_{n-1}, q_n, q_{n+1}, q_{n+2})$, il reste à considérer le cas des parités $(0, 1, 0, 1)$ et celui de $(1, 0, 1, 0)$. Nous avons alors respectivement q_n impair, $a_{n+1} \neq 1$, et q_{n+1} impair, $a_{n+2} \neq 1$. Pour $q = q_n$ dans le premier cas, $q = q_{n+1}$ dans le second cas, nous obtenons $q\|q\alpha\| < 1/2$. $\square$

Lemma 3.3 (3.3). *Soit $q \in \mathcal{Q}(\alpha)$. Si q est impair et si $q\|q\alpha\| < \frac{1}{2}$, alors*

$$\forall x \in \mathbb{T}, \xi_q(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \xi(x + j\alpha) \in \{+1, -1\}, \quad \mu(\xi_q = 1) = \mu(\xi_q = -1) = \frac{1}{2}.$$

Proof. Les discontinuités sont de la forme $\frac{r}{q} - j_1(r)\frac{\theta}{q}$, $\frac{r}{q} - j_2(r)\frac{\theta}{q} + \frac{1}{2q}$, $|\theta| < \frac{1}{2q}$, avec des sauts ± 2 , où $0 \leq j_1(r), j_2(r) < q$, pour $r = 0, \dots, q-1$.

Les sauts successifs de ξ_q sont alternativement $+2, -2$ ou $-2, +2$ à partir d'une valeur initiale constante u sur l'intervalle de continuité partant de 0, de sorte que les valeurs de ξ_q sont u et $u + 2$, ou u et $u - 2$.

La fonction ξ vérifie la relation d'antisymétrie $\xi(x + \frac{1}{2}) = -\xi(x)$, donc ξ_q est également antisymétrique. Par conséquent, dans le premier cas $u = -1$ et dans le deuxième cas $u = 1$. D'où $\xi_q \in \{-1, +1\}$.

Comme ξ_q est d'intégrale nulle, on obtient la relation voulue. $\square$

Théorème 3.4 ((3.4) Ergodicité de l'extension par $1_{[0, \frac{1}{2}[} - 1_{[\frac{1}{2}, 1[}$). *Pour tout irrationnel α , la transformation $\tilde{T}_{\alpha, \xi}$ est ergodique sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ muni de la mesure produit.*

Proof. $\mathcal{E}(\xi)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. D'après le lemme 3.3, 1 est une quasi-période du cocycle (ξ_n) au-dessus de toute rotation irrationnelle T_α . Par le lemme 7.2, 1 est dans $\mathcal{E}(\xi)$. Il en résulte que $\mathcal{E}(\xi) = \mathbb{Z}$, ce qui entraîne l'ergodicité. $\square$

Cet exemple est l'un des exemples les plus simples d'extension ergodique en mesure infinie. C'est un cas particulier d'un résultat général sur les cocycles dont les discontinuités sont "bien séparées", condition vérifiée par les cocycles à discontinuités rationnelles au-dessus d'une rotation du cercle.

Nous allons maintenant construire à l'opposé un exemple de cocycle non régulier. La construction passe par l'étude d'une équation fonctionnelle.

4. Equation de quasi-cobord et cocycle non régulier

Une équation de quasi-cobord multiplicatif

Nous considérons maintenant une équation fonctionnelle intervenant dans l'étude de certains cocycles au-dessus des rotations. Nous l'utiliserons pour donner un exemple simple d'extension non régulière.

Notons $\mathcal{U}(\mathbb{T})$ le groupe des fonctions mesurables de $\mathbb{T}$ dans le groupe $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1. Pour $r \in \mathbb{R}$, T_r est la translation $x \rightarrow x + r \bmod 1$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, soit $T = T_\alpha$ une rotation $x \rightarrow x + \alpha \bmod 1$ sur le cercle réalisé comme le tore $\mathbb{T}$. On dit qu'une fonction $\psi \in \mathcal{U}(\mathbb{T})$ est un *quasi-cobord multiplicatif* s'il existe $\lambda \in \mathcal{U}$ et $\zeta \in \mathcal{U}(\mathbb{T})$ tels que $\psi = \lambda \frac{\zeta \circ T}{\zeta}$.

A la suite des travaux de W. Veech, K. Merrill [Merril 1985] a donné une condition suffisante pour que la fonction définie sur le cercle par $\varphi_{t,s} := e^{2\pi i s 1_{[0,t]}}$ soit un quasi-cobord multiplicatif, c'est-à-dire telle qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et f mesurable de module 1 solution de l'équation

$$(11) \quad e^{2i\pi s(1_{[0,t]} - t)} = e^{2i\pi\gamma} \frac{f \circ T_\alpha}{f}.$$

M. Guenais et F. Parreau [Guenais-Parreau 2006] ont ensuite obtenu des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres (t, s, γ) et les ont étendues à des fonctions en escalier plus générales.

Théorème 4.1 ((4.1) [Guenais-Parreau 2006], Théorème 1). *L'équation (11) admet une solution mesurable f pour les paramètres (t, s, γ) si et seulement s'il existe une suite d'entiers (b_n) telle que :*

$$t = \sum_{k \geq 0} b_k q_k \alpha \bmod 1, \text{ avec } \sum_{k \geq 0} \frac{|b_k|}{a_{k+1}} < \infty, \sum_{k \geq 0} \|b_k s\|^2 < \infty,$$

$$\gamma = \ell \alpha - \sum_{k \geq 0} \lfloor b_k s \rfloor q_k \alpha \bmod 1, \text{ pour un entier } \ell.$$

Pour la construction d'un cocycle non régulier, nous utiliserons le résultat dû à K. Merrill, dont nous donnerons une preuve en annexe:

Notation: $e(x) = e^{2\pi i x}$, $\sigma(x) := \{x\} - \frac{1}{2}$. On a $\sigma(\cdot + t) - \sigma = 1 - t - 1_{[1-t, 1[}$. L'équation traitée ci-dessous revient à l'équation (11).

Théorème 4.2 (4.2). *Soient t, s des paramètres tels que $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k q_k \alpha \bmod 1$, $b_k \in \mathbb{Z}$, et*

$$(12) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|}{a_{k+1}} < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|b_k s\| < +\infty.$$

Alors il existe une fonction ζ mesurable de module 1 et un nombre λ de module 1 tels que (équation de quasi-cobord multiplicatif):

$$(13) \quad \frac{e^{2\pi i s \sigma(x+t)}}{e^{2\pi i s \sigma(x)}} = \lambda \frac{\zeta(x + \alpha)}{\zeta(x)}.$$

4.3. *La fonction ζ est unique à la multiplication près par un multiple de $e(\ell x)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, et λ est de la forme $\lambda = e(\ell' \alpha - \sum_{k=0}^{\infty} (\lfloor b_k s \rfloor + \eta_k) q_k \alpha)$, $\ell' \in \mathbb{Z}$, avec ¹ $\eta_k = 0$, si $\|b_k s\| = \{b_k s\}$, $= 1$, si $\|b_k s\| = 1 - \{b_k s\}$.*

Si α est à quotients partiels bornés ($\alpha \in \text{Bad}$), les seules valeurs permises pour t sont de la forme $k\alpha \bmod 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Nous supposons donc $\alpha \notin \text{Bad}$.

Dans la suite nous utiliserons le résultat du théorème 4.2 pour construire des fonctions en escalier produisant des cocycles non réguliers. Etant donné la rotation par α , nous

¹Rappelons que, pour u réel, $\|u\| = \inf(\{u\}, 1 - \{u\})$. Nous avons $\|u\| = u - \lfloor u \rfloor + \eta$ avec $\eta = 0$ dans le premier cas, $-\|u\| = u - (\lfloor u \rfloor + \eta)$ avec $\eta = 1$ dans le deuxième cas; d'où $b_k s - (\lfloor b_k s \rfloor + \eta_k) = \pm \|b_k s\|$.

aurons besoin de valeurs des paramètres (t, s) satisfaisant les conditions du théorème et tels que s soit irrationnel. Voici un procédé pour obtenir de telles valeurs.

Lemma 4.4. *Soit α à quotients non bornés. Dans le résultat du théorème 4.2, on peut choisir la suite d'entiers (b_n) telle qu'il y ait une solution de l'équation*

$$(14) \quad \frac{e^{2\pi i s \sigma(x+t)}}{e^{2\pi i s \sigma(x)}} = \lambda \frac{\zeta(x+\alpha)}{\zeta(x)}.$$

avec une valeur irrationnelle du paramètre s .

Proof. Notons que pour qu'il existe une solution s irrationnelle, il faut $\lim_{k: b_k \neq 0} |b_k| = +\infty$. Sinon, il existe une sous suite $b_{k_j} = c > 0$ constante. Comme $\|cs\| > 0$ si s est irrationnel, la condition $\sum_{k=0}^{\infty} \|b_k s\| < +\infty$ n'est pas vérifiée.

Si $\alpha \notin \text{Bad}$, il existe un sous-suite non bornée (a_{k_j}) et l'on peut choisir une suite (b_k) vérifiant (12) telle que la sous-suite (b_{k_j}) des b_k non nuls soit strictement croissante vers $+\infty$.

Prenons une suite croissante d'entiers positifs (ℓ_j) telle que $\ell_{j+1} < \frac{b_{k_{j+1}}}{b_{k_j}} \ell_j$. Etant donnée une suite décroissante (ε_j) de réels > 0 dont la série converge, considérons la suite d'intervalles emboîtés

$$\dots \subset \left[\frac{\ell_{j+1}}{b_{k_{j+1}}} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{b_{k_{j+1}}}, \frac{\ell_{j+1}}{b_{k_{j+1}}} + \frac{\varepsilon_{j+1}}{b_{k_{j+1}}} \right] \subset \left[\frac{\ell_j}{b_{k_j}} - \frac{\varepsilon_j}{b_{k_j}}, \frac{\ell_j}{b_{k_j}} + \frac{\varepsilon_j}{b_{k_j}} \right] \subset \dots$$

L'intersection est réduite à un point noté s qui vérifie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|b_k s\| = \sum_{j=0}^{\infty} \|b_{k_j} s\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j < +\infty.$$

Si $s = u/v$ (avec u, v entiers > 0 et premiers entre eux), alors v doit diviser b_{k_j} pour j assez grand. Ceci n'est pas possible si on choisit dans la suite b_j une infinité d'entiers premiers entre eux. $\square$

Notons $\tilde{H}$ l'ensemble des valeurs de $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k q_k \alpha \bmod 1$ satisfaisant aux conditions de la construction précédente.

4.1. Un exemple de cocycle en escalier non régulier. Le lemme simple suivant donne dans certains cas un procédé pour montrer qu'un cocycle n'est pas régulier. ([Conze 2009])

Lemma 4.5 (4.5). *Soit $\varphi : M \mapsto \mathbb{Z}$ une fonction mesurable telle qu'il existe $s \notin \mathbb{Q}$ pour lequel l'équation multiplicative $e^{2\pi i s \varphi} = \psi / \psi \circ T$ admet une solution mesurable ψ . Si φ n'est pas un cobord, alors $\tilde{\mathcal{E}}(T, \varphi) = \{0, \infty\}$ et le cocycle (T, φ) engendré par φ est non régulier.*

Proof. : D'après l'existence d'une solution ψ de l'équation multiplicative, il existe une fonction φ_1 mesurable à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et une fonction mesurable ζ telles que $\varphi = \zeta - \zeta \circ T + s^{-1}\varphi_1$.

On a donc $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) = \tilde{\mathcal{E}}(\varphi_1)$, $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi_1) \subset s^{-1}\mathbb{Z} \cup \infty$, d'où $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) \subset (\mathbb{Z} \cap s^{-1}\mathbb{Z}) \cup \infty = \{0, \infty\}$. Si φ n'est pas un cobord, alors $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) = \{0, \infty\}$. $\square$

Si α est un nombre irrationnel $\notin \text{Bad}$, nous allons montrer qu'il existe β, r dans $]0, 1[$ tels que, pour φ définie par $\varphi(x) := 1_{[0, \beta]}(\{x\}) - 1_{[0, \beta]}(\{x + r\})$, $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) = \{0, \infty\}$.

Ceci implique que le cocycle (T, φ) au-dessus de la rotation T_α n'est pas régulier, en particulier non réductible à un cobord et que $\tilde{T}_{\alpha, \varphi}$ n'est pas ergodique sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{Z}$ muni du produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$ par la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$.

Théorème 4.6 (4.6). *Si $\alpha \notin \text{Bad}$, il existe t tel que, pour presque tout r , $\varphi^{(r)} := 1_{[0, t]} - 1_{[0, t]} \circ T_r$ définit un cocycle non régulier à valeurs dans $\mathbb{Z}$ au-dessus de la rotation T_α .*

Proof. Prenons t dans l'ensemble $\tilde{H}$ construit dans le lemme 4.4. D'après le théorème 4.2 et le lemme 4.4, il existe $\gamma \in \mathcal{U}$, s irrationnel et $\xi \in \mathcal{U}(\mathbb{T})$ tels que

$$e^{2\pi i s 1_{[0, t]}} = \gamma \xi / \xi \circ T_\alpha.$$

Cette relation entraîne que la fonction $e^{2\pi i s (1_{[0, t]} - 1_{[0, t]} \circ T_r)}$ est un cobord multiplicatif pour tout r .

Montrons que, pour $t \notin \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ fixé, l'ensemble $\{r : 1_{[0, t]} - 1_{[0, t]} \circ T_r \text{ est un cobord}\}$ est négligeable.

Dans le cas contraire, d'après la proposition 4.7 ci-dessous, $1_{[0, t]} - t$ est un cobord additif à une constante additive c près: il existe c et une fonction mesurable ζ tels que $1_{[0, t]} - t = c + \zeta - \zeta \circ T$. Comme les moyennes ergodiques de $1_{[0, t]} - t$ et $\zeta - \zeta \circ T$ tendent vers 0 en probabilité pour μ , il en résulte que $c = 0$. Observons enfin que, en passant à l'exponentielle, on obtient $e^{-2\pi i t} = e^{2\pi i \zeta} / e^{2\pi i \zeta} \circ T$. Ceci implique que $e^{2\pi i t}$ est une valeur propre de la rotation d'angle α , ce qui est exclus par le choix de t .

Nous venons de montrer que, pour $t \in \tilde{H}$, pour presque tout r , la fonction $\varphi_t^{(r)} = 1_{[0, t]} - 1_{[0, t]} \circ T_r$ n'est pas un cobord, et il existe s irrationnel tel que $e^{2\pi i s \varphi_t^{(r)}}$ est un cobord multiplicatif.

Prenons $t \in \tilde{H}$ et r tel que $\varphi_t^{(r)} = 1_{[0, t]} - 1_{[0, t]} \circ T_r$ n'est pas un cobord,. Le lemme 4.5 implique alors que la fonction $\varphi_t^{(r)}$ satisfait : $\overline{\mathcal{E}}(\varphi_t^{(r)}) = \{0, \infty\}$. Elle engendre donc un cocycle non régulier et $\tilde{T}_{\alpha, \varphi_t^{(r)}}$ n'est pas ergodique sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{Z}$ muni du produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$ par la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$. $\square$

Compte-tenu de la relation $1_{[0,t]} - 1_{[0,t]} \circ T_r = 1_{[0,r]} - 1_{[0,r]} \circ T_t$, l'énoncé précédent montre l'existence de réels t tels que, pour presque tout r , $1_{[0,r]} - 1_{[0,r]} \circ T_t$ soit non régulier. La décomposition ergodique de l'extension de la rotation associée est basée sur une infinité non dénombrable de mesures quasi-invariantes sur le cercle.

Proposition 4.7 (4.7). *Soit φ une fonction mesurable à valeurs réelles sur le cercle. Soit T_α une rotation ergodique. Si, pour un ensemble non négligeable de valeurs de r , il existe une fonction mesurable ψ_r telle que :*

$$(15) \quad \varphi - \varphi \circ T_r = \psi_r \circ T_\alpha - \psi_r,$$

alors φ est un quasi-cobord additif : $\varphi = c + h \circ T_\alpha - h$, pour une fonction mesurable h et une constante c .

Proof. La relation (15), entraîne, pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour un ensemble de mesure > 0 de r ,

$$e^{2\pi i s \varphi(x)} / e^{2\pi i s \varphi(T_r x)} = e^{2\pi i s \psi_r(T_\alpha x)} / e^{2\pi i s \psi_r(x)}.$$

D'après la proposition 3 de [Lesigne 1993], pour tout s il existe alors $\lambda_s \in \mathcal{U}$, $\zeta_s \in \mathcal{U}(X)$ tels que :

$$(16) \quad e^{2\pi i s \varphi} = \lambda_s T_\alpha \zeta_s / \zeta_s.$$

D'après un théorème de [Moore-Schmidt 1980], (16) implique le résultat. $\square$

5. $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$ -cocycles au-dessus de systèmes hyperboliques ($d = 1, 2$)

Cocycles au-dessus de systèmes hyperboliques

5.1. Question. Dans l'étude des extensions de systèmes dynamiques, une question générale est de déterminer si un cocycle donné (T, φ) est régulier et n'est pas un cobord.

Dans le cas où T est une rotation, nous avons vu des exemples de fonctions simples engendrant au-dessus de T un cocycle non-régulier.

Nous allons maintenant considérer le cas hyperbolique où, au contraire, on peut s'attendre à ce que (T, φ) soit régulier quand φ est par exemple höldérienne.

On prend $G = \mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$.

On note (M, μ, T) le système dynamique de base avec comme modèle, par exemple, l'action hyperbolique obtenue en faisant agir sur le tore $\mathbb{T}^\rho$ une matrice hyperbolique de $Sl(\rho, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice $\rho \times \rho$ à coefficients entiers, de déterminant ± 1 , dont les valeurs propres sont de module $\neq 1$.

Prenons le cas de l'automorphisme hyperbolique de $\mathbb{T}^2$ noté T défini par l'action modulo 1 de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{T}^2$. Pour obtenir une $\mathbb{Z}$ -extension très simple, prenons deux disques D, D' de même rayon dans le tore $\mathbb{T}^2$. Une question est celle de l'ergodicité du cocycle engendré au-dessus de l'automorphisme T par la fonction $\varphi := 1_D - 1_{D'}$. L'extension est récurrente, car φ est centrée.

Plus généralement, soit T un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^p$ et $\varphi := 1_A - 1_B$ où A, B sont deux sous-ensembles de même volume dans le tore ayant des bords réguliers. Une question simple est celle de l'ergodicité (ou du moins de la régularité) du cocycle engendré par φ au-dessus de T sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{Z}$.

5.2. Espaces de fonctions sur M . Dans ce qui suit, la réponse à cette question va illustrer les méthodes basées sur les feuilletages stable et instable des transformations hyperboliques.

On note que la fonction φ dans cet exemple n'est pas höldérienne. La méthode d'opérateur de transfert via un codage ne s'applique pas a priori à ce type de fonctions. Ceci conduit à introduire une classe de fonctions ad-hoc.

Si $\varphi : M \mapsto G$ prend un nombre fini de valeurs, $R(\varphi) \subset G$ désignera l'ensemble des valeurs prises par φ . Etant donné un sous-ensemble A dans M , on appelle δ -bord de A l'ensemble $\partial_\delta(A) := \{x \in A : d(x, A^c) \leq \delta\}$.

Pour $a \in R(\varphi)$ et $\delta > 0$, notons $\partial_\delta\{\varphi = a\}$ le δ -bord dans M de l'ensemble $\{x : \varphi(x) = a\}$, c'est-à-dire $\partial_\delta\{\varphi = a\} := \{x \in \{\varphi = a\} : d(x, \{\varphi \neq a\}) \leq \delta\}$.

Definition 5.1. *L'espace $\mathcal{F}_0$ est formé des fonctions centrées φ à valeurs dans G vérifiant:*

$$(17) \quad \text{pour une constante } C, \sum_{a \in R(\varphi)} \mu(\partial_\delta\{\varphi = a\}) \leq C\delta, \forall \delta > 0.$$

On peut considérer également les espaces $\mathcal{H}_\alpha$ de fonctions höldériennes sur M , pour $0 < \alpha \leq 1$ ou des espaces $\mathcal{F}_\alpha$ de fonctions localement höldériennes sur M .

Pour $x \in M$, la feuille stable de x est $W^s(x) := \{y \in M : d(T^n y, T^n x) \rightarrow 0\}$.

La feuille instable est $W^u(x) := \{y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^{-n} y, T^{-n} x) \rightarrow 0\}$.

Supposons qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in M$,

$$\forall y \in W^s(x), \text{ il existe } K_1(x, y) \text{ tel que } d(T^n y, T^n x) \leq K_1(x, y) c^n d(y, x), n \geq 0,$$

$$\forall y \in W^u(x), \text{ il existe } K_2(x, y) \text{ tel que } d(T^{-n} y, T^{-n} x) \leq K_2(x, y) c^n d(y, x), n \geq 0.$$

Lemma 5.2 (5.2). *Si $\varphi \in \mathcal{F}_0$, il existe $M_1(\varphi)$ de mesure pleine dans M tel que pour tout $x \in M_1$:*

- *pour tout $y \in W^s(x)$, il existe $N_1(x, y)$ tel que $\varphi(T^n x) = \varphi(T^n y)$, pour $n \geq N_1(x, y)$;*
- *pour tout $y \in W^u(x)$, il existe $N_2(x, y)$ tel que $\varphi(T^{-n} x) = \varphi(T^{-n} y)$, pour $n \geq N_2(x, y)$.*

Proof. Traitons le cas de la feuille stable. Prenons $\delta \in]c, 1[$. D'après (17), on a, par invariance de la mesure :

$$\mu\left(\bigcap_N \bigcup_{n \geq N} \bigcup_{a \in R(\varphi)} \mu(T^{-n} \partial_{\delta^n} \{\varphi = a\})\right) \leq \lim_N \frac{C\delta^N}{1 - \delta} = 0.$$

Par conséquent, le complémentaire M_1 est de mesure pleine dans M , et pour tout $x \in M_1$, il existe $N(x) \geq 0$ tel que $\varphi(T^n x) = a$ implique $d(T^n x, \{u : \varphi(u) \neq a\}) \geq \delta^n$, pour tout $a \in R(\varphi)$ et $n \geq N(x)$.

Soit x dans M_1 et $y \in W^s(x)$. Nous avons par hypothèse, pour tout $n \geq 1$, $d(T^n x, T^n y) < K_1(x, y) c^n$. Il existe un entier $N'(x, y)$ tel que pour $n \geq N'(x, y)$, $K_1(x, y) c^n < \delta^n$. Il en résulte que, si $\varphi(T^n x) = a$ pour $a \in R(\varphi)$ et $\varphi(T^n y) \neq a$, alors $T^n x \in \partial_{\delta^n} \{\varphi = a\}$.

Pour $n \geq N(x)$ et x dans M_1 ceci n'est pas possible et donc implique que $\varphi(T^n x)$ et $\varphi(T^n y)$ prennent la même valeur pour $n \geq N_1(x, y) = \max(N(x), N'(x, y))$. $\square$

Définition de F^+ et de F^-

$$\begin{aligned} & \text{pour } w \in W^s(x), F^+(x, w) := \lim_{n \rightarrow +\infty} [\varphi_n(w) - \varphi_n(x)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\varphi(w) + \varphi(Tw) + \dots + \varphi(T^{n-1}w)) - (\varphi(x) + \varphi(Tx) + \dots + \varphi(T^{n-1}x))], \\ & \text{pour } w \in W^u(x), F^-(x, w) := \lim_{n \rightarrow -\infty} [\varphi_n(w) - \varphi_n(x)] \\ &= \lim_{n \rightarrow -\infty} [-(\varphi(T^n w) + \varphi(T^{n+1}w) + \dots + \varphi(T^{-1}w)) \\ & \quad + (\varphi(T^n x) + \varphi(T^{n+1}x) + \dots + \varphi(T^{-1}x))]. \end{aligned}$$

La définition s'applique aux fonctions höldériennes, à l'espace $\mathcal{F}_0$ et aux espaces $\mathcal{F}_\alpha$. Dans ces deux derniers cas, F^+ et F^- sont bien définis en dehors d'un ensemble négligeable.

Pour l'espace fonctionnel $\mathcal{F}_0$, nous ne disposons pas du théorème limite local (TLL), mais le théorème central limite (TCL) peut être établi, par exemple en utilisant la méthode de feuilletage et de martingale. Le TCL assure la récurrence du processus $(S_n \varphi)$ si φ est à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{R}^2$.

Notons qu'en dimension $d \geq 3$, la propriété ASIP (Almost Sure Invariance Principle), quand elle est vérifiée, implique la transience. On se limite donc à $d = 1$ ou 2 . Mais

on peut également sans restriction former des produits gauches avec des G -systèmes de mesure invariante finie.

6. Valeurs essentielles et $\mathbf{Z}$ -accessibilité

Notations: Pour f sur $M \times G$, les sommes ergodiques pour l'action de T_φ sur $M \times G$ sont

$$\begin{cases} f(x, u) + f(Tx, u + \varphi(x)) + \dots + f(T^{n-1}x, u + \varphi_{n-1}(x)), & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -(f(T^n x, u + \varphi_n(x)) + f(T^{n+1}x, u + \varphi_{n+1}(x)) + \dots + f(T^{-1}x, u + \varphi_{-1}(x))), & n < 0. \end{cases}$$

Nous les noterons $S_n^\varphi f(x, u)$ ou simplement $S_n f(x, u)$.

Nous supposons le cocycle (φ_n) défini par φ au dessus de T récurrent.

Fixons une fonction f_0 bornée, continue et intégrable sur G , vue aussi comme fonction sur $M \times G$, telle que $f_0(g) > 0$ partout sur G et $\int_G f_0(g) dg = 1$. Si f est bornée et à support compact sur $M \times G$, il existe $c > 0$ tel que $|f(x, g)| \leq c f_0(g)$, $\forall (x, g) \in M \times G$.

La récurrence de l'extension T_φ et de son inverse implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^\varphi f_0(x, u) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{-n}^\varphi f_0(x, u) = -\infty, \text{ pour presque tout } (x, u).$$

Notons $\mathcal{J}$ la σ -algèbre des ensembles T_φ -invariants et $\tilde{\mu}$ la mesure $\mu \times m_G$ sur $M \times G$, où m_G (notée aussi m) est la mesure de Lebesgue ou de comptage sur G .

Rappelons que $\mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(T, \varphi)$ est le sous-groupe fermé de G formé des périodes des fonctions T_φ -invariantes.

Considérons une famille $\mathcal{H}$ dénombrable dense dans $L^1(M \times G)$ de fonctions bornées à support compact et lipschitziennes en x .

Pour $f \in L^1(M \times G)$, notons

$$\begin{aligned} L_f^+(x, u) &:= \limsup_n \frac{S_n f(x, u)}{S_n f_0(x, u)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x, u + \varphi_k(x))}{\sum_{k=0}^{n-1} f_0(T^k x, u + \varphi_k(x))}, \\ L_f^-(x, u) &:= \limsup_n \frac{S_{-n} f(x, u)}{S_{-n} f_0(x, u)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k} x, u + \varphi_{-k}(x))}{\sum_{k=0}^{n-1} f_0(T^{-k} x, u + \varphi_{-k}(x))}. \end{aligned}$$

Par le théorème ergodique quotient de Hopf, on obtient pour la famille dénombrable $\mathcal{H}$:

Lemma 6.1. *Il existe un ensemble de pleine mesure $M_0(\varphi, \mathcal{H})$ dans M tel que, pour toute $f \in \mathcal{H}$, pour tout $x \in M_0(\mathcal{H})$, pour presque tout $u \in G$,*

$$L_f^+(x, u) = \lim_n \frac{S_n f(x, u)}{S_n f_0(x, u)} = L_f^-(x, u) = \lim_n \frac{S_{-n} f(x, u)}{S_{-n} f_0(x, u)} = \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}\left(\frac{f}{f_0} | \mathcal{J}\right)(x, u).$$

En particulier, pour $x \in M_0(\mathcal{H})$, les limites supérieures $L_f^+(x, u)$ et $L_f^-(x, u)$ sont des limites et elles sont égales entre elles.

Definition 6.2 (Z-accessibilité). *Un domaine $R \subset M$ de mesure > 0 est dit Z-accessible (pour les feuilletages W^s, W^u stable/instable de T) si, pour tout ensemble M_0 de mesure pleine dans M , il existe un entier $N \geq 2$ et $x_R \in M_0$ tels que*

$\forall x \in M_0 \cap R$, *il existe $w_j = w_j(x, x_R) \in M_0, j = 0, \dots, N$, vérifiant*

$$w_0(x, x_R) = x, w_N(x, x_R) = x_R,$$

$$w_j \in W^s(w_{j-1}) \cap W^u(w_{j+1}) \cap M_0, 0 < j < N,$$

$w_j(x, x_R)$ *est une fonction mesurable de x (pour la tribu complétée), $0 < j < N$.*

Théorème 6.3 (6.3). *Soit $\varphi \in \mathcal{F}_0$. Supposons qu'il existe dans M un ensemble Z-accessible R de mesure > 0 et soit $\tilde{R}$ l'ensemble T -invariant $\tilde{R} := \cup_{i \geq 0} T^i R$.*

Alors sur $\tilde{R}$, il existe une fonction mesurable γ telle que toute fonction g mesurable bornée T_φ -invariante est de la forme $g(x, u) = r_g(u + \gamma(x))$, où r_g est mesurable sur G . De plus $\psi(x) := \varphi(x) + \gamma(Tx) - \gamma(x)$ appartient, pour presque tout x , au groupe $\mathcal{E}(\varphi)$ des valeurs essentielles finies du cocycle (T, φ) . Le cocycle (T, φ) est régulier sur $\tilde{R}$.

La même conclusion est vérifiée sur un ensemble de mesure pleine dans M si T est ergodique, ou si M est réunion dénombrable d'ensembles Z-accessibles R_i .

La preuve du théorème 6.3 est donnée en annexe.

Pour des systèmes hyperbolique une technique classique est celle des partitions markoviennes.

La méthode que nous venons de présenter montre la régularité des cocycle (T, φ) pour les classes du type $\mathcal{F}_0$ de fonctions décrites plus haut, pour lesquelles les techniques de codage markovien et d'opérateur de transfert ne semblent pas adaptées.

Elle s'applique (travail en cours avec S. Le Borgne) quand T est une transformation telle que:

décalage (shift) avec mesure de Gibbs,

transformations d'Anosov,

systèmes partiellement hyperboliques,

flot géodésique,

flots diagonaux.

7. Annexe: démonstrations

7.1 (Preuve de la proposition 2.3).

A_3 La fonction φ' étant höldérienne et bornée sur $]t_j, t_{j+1}[$, nous avons pour des constantes C, C_1 , pour $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{(2|k|)^\delta} &\geq \left| \int_{t_j}^{t_{j+1} - \frac{1}{2|k|}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx - \int_{t_j}^{t_{j+1} - \frac{1}{2|k|}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x + \frac{1}{2|k|}) dx \right| \\ &= \left| \int_{t_j}^{t_{j+1} - \frac{1}{2|k|}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx + \int_{t_j + \frac{1}{2|k|}}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx \right| = 2 \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx \right| + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx \right| \leq C|k|^{-\delta}.$$

La fonction définie sur $\mathbb{T} \setminus J$ par $\psi(x) := \varphi(x) + \sum_{j=1}^D s_j \sigma(x - t_j)$, où s_j est le saut de φ en t_j , se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{T}$; d'où

$$\sum_j [e^{-2\pi i k t_{j+1}} \psi(t_{j+1}^-) - e^{-2\pi i k t_j} \psi(t_j^+)] = 0.$$

La relation

$$\begin{aligned} &\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \psi(x) dx \\ &= \frac{-1}{2\pi k} [e^{-2\pi i k t_{j+1}} \psi(t_{j+1}^-) - e^{-2\pi i k t_j} \psi(t_j^+) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx], \end{aligned}$$

entraîne donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \psi(x) dx &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \psi(x) dx \\ &= \sum_j \frac{-1}{2\pi k} [e^{-2\pi i k t_{j+1}} \psi(t_{j+1}^-) - e^{-2\pi i k t_j} \psi(t_j^+) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx] \\ &= \frac{-1}{2\pi k} \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx. \end{aligned}$$

Par intégration par partie, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} [\varphi'(x) + \sum_{j=1}^D s_j] dx \\ &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx + \sum_{j=1}^D s_j \int_0^1 e^{-2\pi i k x} dx = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration

$$\left| \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx \right| \leq \sum_j \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-2\pi i k x} \varphi'(x) dx \right| \leq C|k|^{-\delta};$$

$$\text{d'où } |c_k(\psi)| = \frac{1}{2\pi|k|} \left| \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \psi'(x) dx \right| \leq C_1|k|^{-(1+\delta)}.$$

Si α est de type $< 1 + \delta$, on conclut par la proposition 2.2. $\square$

7.2 (Preuve du lemme 7.2). A_4 Soit (φ_n) un cocycle récurrent à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ au-dessus d'une rotation ergodique T_α . Soit $c \in \mathbb{R}^d$. S'il existe $\delta > 0$ et des suites $(\ell_n)_{n \geq 1}$, $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, avec $\lim_n \varepsilon_n = 0$, vérifiant

$$(18) \quad \lim_n T_\alpha^{\ell_n} x = x, \forall x \in M \text{ et } \mu(\{x : d(\varphi_{\ell_n}(x), c) < \varepsilon_n\}) \geq \delta, \forall n \geq 1,$$

alors c est une valeur essentielle du cocycle.

Proof. 1) Soit $f(x, u)$ une fonction invariante par $\tilde{T}_\varphi$ sur $M \times \mathbb{R}^d$, $f(T_\alpha x, \varphi(x) + u) = f(x, u)$. On peut supposer que f est bornée (car $\tilde{T}_{\alpha, \varphi}$ est conservatif) et il est possible de la régulariser par convolution par rapport à la variable u , en remplaçant f par la fonction $(x, u) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x, s) h(u - s) ds$, où h est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ à support compact. Par conséquent, on peut supposer que f est continue en u .

Pour tout c , l'ensemble $E(f, c) := \{x : f(x, c + u) = f(x, u), \text{ pour presque tout } u\}$ est T_α -invariant. La transformation T_α étant ergodique, pour montrer la relation $f(x, c + u) = f(x, u)$, pour μ -presque tout x , si c vérifie (18), il suffit de montrer que $\mu(E(f, c)) \neq 0$.

La condition $\lim_n T_\alpha^{\ell_n} x = x$, $\forall x \in M$, implique, pour ζ intégrable sur M :

$$(19) \quad \lim_n \int_M |\zeta(T_\alpha^{\ell_n} x) - \zeta(x)| d\mu(x) = 0.$$

En effet, cette propriété est vérifiée par les fonctions continues sur M et peut être étendue à la classe des fonctions intégrables, grâce à l'invariance de la mesure μ .

2) Soit g une fonction continue et intégrable > 0 sur $\mathbb{R}^d$. Par (19), on obtient :

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \int_M |f(T_\alpha^{\ell_n} x, u) - f(x, u)| g(u) d\mu(x) du = 0.$$

Notons A_n l'ensemble $\{x : d(\varphi_{\ell_n}(x), c) < \varepsilon_n\}$ (de mesure $\geq \delta$ par hypothèse). On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \int_M 1_{A_n}(x) |f(x, u) - f(x, u - c)| g(u) d\mu(x) du \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_M |f(x, u) - f(T_\alpha^{\ell_n} x, u)| d\mu(x) \right) g(u) du \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \int_M 1_{A_n}(x) |f(x, u - \varphi_{\ell_n}(x)) - f(x, u - c)| g(u) d\mu(x) du. \end{aligned}$$

Les deux termes de droite tendent vers 0, de sorte que :

$$\lim_n \int_M 1_{A_n}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x, u) - f(x, u - c)| g(u) du \right) d\mu(x) = 0.$$

Posons $F_g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x, u) - f(x, u - c)| g(u) du$. Supposons la fonction F_g non nulle p.p. Il existe alors $\gamma > 0$ tel que $F_g(x) \geq \gamma$ sur un ensemble de mesure $> 1 - \frac{1}{2}\delta$, d'où $F_g(x) \geq \gamma$ sur un sous-ensemble de mesure $\geq \frac{1}{2}\delta$ de A_n , ce qui entraîne que la limite précédente est $\geq \frac{1}{2}\delta\gamma$, contrairement à la convergence vers 0.

On a donc montré que l'ensemble $E(f, c)$ sur lequel $f(x, u) = f(x, u - c)$ est de mesure non nulle, donc de pleine mesure. Ceci entraîne que c est une période des fonctions $\tilde{T}_{\alpha, \varphi}$ -invariantes et par conséquent une valeur essentielle. $\square$

7.3. Preuve du théorème 4.2

Lemma 7.4 (Lemme préliminaire). *A_{5b} Si (v_j) est une suite de fonctions de module 1 telle que $\sum_j \|1 - v_j\|_1 < +\infty$, le produit $\prod_{j=1}^n v_j$ converge dans L^1 vers une fonction v de module 1.*

Proof. Nous avons $|\prod_{j=1}^{N+M} v_j - \prod_{j=1}^N v_j| \leq \sum_{j=N+1}^{N+M} |1 - v_j|$, d'où

$$\left\| \prod_{j=1}^{N+M} v_j - \prod_{j=1}^N v_j \right\|_1 \leq \sum_{j=N+1}^{N+M} \|1 - v_j\|_1 \leq \sum_{j=N+1}^{+\infty} \|1 - v_j\|_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Produit de quasi-cobords multiplicatifs

La fonction (en dents de scie) σ , définie sur $[0, 1[$ par $\sigma(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, peut être vue comme une fonction sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec une unique discontinuité en 0.

Nous avons, pour $0 \leq u \leq u + \delta < 1$: $\sigma(x + u) = \sigma(x) + u - 1_{[1-u, 1[}(x)$, d'où:

$$(20) \quad \sigma(x + u + \delta) - \sigma(x + u) = \delta - 1_{[1-(u+\delta), 1-u[}(\{x\}).$$

Pour une fonction φ sur le cercle, notons $\varphi_r = \varphi + \dots + \varphi \circ T_\alpha^r$ la somme ergodique au temps $r \geq 0$. Nous avons $\varphi \circ T_\alpha^r - \varphi = \varphi_r \circ T_\alpha - \varphi_r$ pour tout $r \geq 1$, ce qui fournit la relation de cobord multiplicatif

$$(21) \quad \frac{\exp(2\pi i s \varphi) \circ T_\alpha^r}{\exp(2\pi i s \varphi)} = \frac{\exp(2\pi i s \varphi_r) \circ T_\alpha}{\exp(2\pi i s \varphi_r)}.$$

Prenons $\varphi = \sigma$. La relation (21) s'écrit, en introduisant une suite de constantes ($\gamma_k = \exp(2\pi i s u_k)$) de module 1 choisies ultérieurement:

$$(22) \quad \frac{\exp(2\pi i s \sigma) \circ T_\alpha^{b_k q_k}}{\exp(2\pi i s \sigma)} = \frac{\exp(2\pi i s \sigma_{b_k q_k}) \circ T_\alpha}{\exp(2\pi i s \sigma_{b_k q_k})} = \frac{\gamma_k \exp(2\pi i s \sigma_{b_k q_k}) \circ T_\alpha}{\gamma_k \exp(2\pi i s \sigma_{b_k q_k})},$$

L'idée de la preuve du théorème est d'obtenir l'expression de quasi-cobord multiplicatif (13) comme produit infini des quotients précédents.

Cependant, il conviendra de modifier $\exp(2\pi i s \varphi_{b_k q_k})$ en la multipliant par la fonction T_α -propre e_{b_k, q_k} définie par

$$e_{b_k, q_k}(x) := \exp(-2\pi i ([b_k s] + \eta_k) q_k x),$$

où $\eta_k = 0$, si $\|b_k s\| = \{b_k s\}$, $= 1$, si $\|b_k s\| = 1 - \{b_k s\}$, de valeur propre $\gamma_k = \exp(-2\pi i ([b_k s] + \eta_k) q_k \alpha)$. La relation (22) devient alors, en utilisant la notation $e(x) = e^{2\pi i x}$:

$$\frac{e(s\sigma) \circ T_\alpha^{b_k q_k}}{e(s\sigma)} = e(-([b_k s] + \eta_k) q_k \alpha) \frac{[\gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})] \circ T_\alpha}{\gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})}.$$

Nous allons montrer que, sous les conditions du théorème,

$$(23) \quad \sum_k \|1 - \gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})\|_1 < +\infty.$$

Ceci entraînera, en posant $t_{-1} = 0$, $t_k = \sum_{j=0}^k b_j q_j$ pour $k \geq 0$.

$$(24) \quad \sum_k \|1 - [\gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})] \circ T_\alpha^{t_{k-1}}\|_1 < +\infty.$$

Par le lemme préliminaire, il en résulte que le produit infini $\prod_{k=1}^\infty (\gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})) \circ T_\alpha^{t_{k-1}}$ converge dans L^1 vers une fonction ζ de module 1 vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{e(s\sigma) \circ T_t}{e(s\sigma)} &= \prod_{k=0}^\infty e(-([b_k s] + \eta_k) q_k \alpha) \prod_{k=0}^\infty (e_{b_k, q_k} \left(\frac{e(s\sigma) \circ T_\alpha^{b_k q_k}}{e(s\sigma)} \right) \circ T_\alpha^{t_{k-1}}) \\ &= \prod_{k=0}^\infty e(-([b_k s] + \eta_k) q_k \alpha) \frac{\prod_{k=0}^\infty (\gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})) \circ T_\alpha^{t_{k-1}} \circ T_\alpha}{\prod_{k=0}^\infty (\gamma_k e_{b_k, q_k} e(s\sigma_{b_k q_k})) \circ T_\alpha^{t_{k-1}}} \\ &= e\left(-\sum_{k=0}^\infty ([b_k s] + \eta_k) q_k \alpha\right) \frac{\zeta \circ T_\alpha}{\zeta}. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu (13). Il reste donc à montrer (23).

Rappelons que $\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\theta_k}{q_k}$, avec $|\theta_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}$.

L'application $j \rightarrow \{jp_k/q_k\}$ est une bijection de $\{0, 1, \dots, q_k - 1\}$ sur lui-même.

Définissons r_j par $r_j p_k = j \bmod q_k, j = 0, \dots, q_k - 1$. Les points $\{r_j \alpha\}$ et $\{\frac{j}{q_k}\}$ sont à une distance $r_j \frac{|\theta_k|}{q_k} \leq \frac{q_k}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_{k+1}}$.

Pour q entier ≥ 1 , posons $\tilde{\sigma}_q(x) := \sum_{j=0}^{q-1} \sigma(x + \frac{j}{q})$.

Ecrivons simplement p, q, θ pour p_k, q_k, θ_k . En supposant $\theta > 0$, nous avons, avec $r_j p = j \bmod q$ et d'après (20):

$$\begin{aligned} \sigma_{bq}(x) - b\tilde{\sigma}_q(x) &= \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} \sigma(x + \ell\alpha + iq\alpha) - b \sum_{i=0}^{q-1} \sigma(x + \frac{j}{q}) \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{q-1} [\sigma(x + \frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta) - \sigma(x + \frac{j}{q})] \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{q-1} [r_j \frac{\theta}{q} + i\theta - 1_{[1 - (\frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta), 1 - \frac{j}{q}]}(\{x\})] \\ &= \frac{1}{2}b(b-1)\theta + \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{q-1} [r_j \frac{\theta}{q} - 1_{[1 - (\frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta), 1 - \frac{j}{q}]}(\{x\})]. \end{aligned}$$

En posant $u = -\frac{1}{2}b(b-1)\theta$, nous obtenons:

$$u + \sigma_{bq}(x) - b\tilde{\sigma}_q(x) = \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{q-1} [r_j \frac{\theta}{q} - 1_{[1 - (\frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta), 1 - \frac{j}{q}]}(\{x\})].$$

La double somme à droite s'écrit:

$$b \sum_{j=0}^{q-1} r_j \frac{\theta}{q} - \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{q-1} 1_{[1 - (\frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta), 1 - \frac{j}{q}]}(\{x\}) = v - \psi(x),$$

où ψ est la fonction $\sum_{i=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{q-1} 1_{[1 - (\frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta), 1 - \frac{j}{q}]}(\{x\})$ à support dans

$$\bigcup_{j=0}^{q-1} \bigcup_{i=0}^{b-1} [1 - (\frac{j}{q} + r_j \frac{\theta}{q} + i\theta), 1 - \frac{j}{q}] \subset \bigcup_{j=0}^{q-1} [1 - (\frac{j}{q} + b\theta), 1 - \frac{j}{q}],$$

et v est la constante positive $v = b \sum_{j=0}^{q-1} r_j \frac{\theta}{q}$.

La fonction ψ vérifie $\mu(\psi \neq 0) \leq bq\theta$ et v est majorée par $bq\theta$.

En substituant $q_k, b_k, u_k, v_k, \psi_k$ respectivement à q, b, u, v, ψ , nous avons donc montré

$$|u_k + \sigma_{b_k q_k}(x) - b_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x)| \leq b_k q_k \theta_k + \psi_k(x), \text{ avec } \mu(\psi_k \neq 0) \leq b_k q_k \theta_k.$$

La majoration analogue est valide si $\theta_k < 0$.

Nous obtenons finalement, avec $\mu(\psi_k \neq 0) \leq b_k q_k |\theta_k|$,

$$(25) \quad |u_k + \sigma_{b_k q_k}(x) - b_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x)| \leq b_k q_k |\theta_k| + \psi_k(x), \forall k \geq 1.$$

L'inégalité $|1 - e^{iA}| \leq |1 - e^{i(A-B)}| + |1 - e^{iB}|$, pour A, B réels, appliquée avec

$$A = A_k = su_k + s\sigma_{b_k q_k}(x) - ([sb_k] + \eta_k)q_k x \bmod 1,$$

$$B = B_k = sb_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x) - ([sb_k] + \eta_k)q_k x \bmod 1,$$

entraîne

$$|1 - e^{2\pi i(s(u_k + \sigma_{b_k q_k}(x)) - ([sb_k] + \eta_k)q_k x)}| \leq \Delta_1(x) + \Delta_2(x),$$

$$(26) \quad \text{où} \quad \Delta_k^{(1)}(x) := |1 - e^{2\pi i s(u_k + \sigma_{b_k q_k}(x) - b_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x))}|,$$

$$(27) \quad \Delta_k^{(2)}(x) = |1 - e^{2\pi i (sb_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x) - ([sb_k] + \eta_k)q_k x)}|.$$

Majoration de $\|\Delta_k^{(1)}\|_1$ D'après (25) nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Delta_k^{(1)} dx &= \int_0^1 |1 - e^{2\pi i s(u_k + \sigma_{b_k q_k}(x) - b_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x))}| dx \\ &\leq 2\mu\{\psi_k \neq 0\} + \int_{\{\psi_k=0\}} |\sin(\pi s(u_k + \sigma_{b_k q_k}(x) - b_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x)))| dx \\ &\leq (2 + \pi s)b_k q_k \theta_k \leq (2 + \pi s)b_k \frac{q_k}{q_{k+1}} \leq (2 + \pi s) \frac{b_k}{a_{k+1}}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses du théorème, il en résulte $\sum_{k \geq 0} \|\Delta_k^{(1)}\|_1 < +\infty$.

Majoration de $\|\Delta_k^{(2)}\|_1$

Notons $\gamma_q(x) = \sum_{j=0}^{q-1} j 1_{[\frac{j}{q}, \frac{j+1}{q}[}(x) = j$, pour $\frac{j}{q} \leq x < \frac{j+1}{q}$. Pour $0 \leq x < 1$:

$$\tilde{\sigma}_q(x) = qx - \frac{q}{2} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{j}{q} - \sum_{j=0}^{q-1} 1_{[1-\frac{j}{q}, 1[}(x) = qx - \frac{1}{2} - \sum_{j=0}^{q-1} j 1_{[\frac{j}{q}, \frac{j+1}{q}[}(x) = qx - \frac{1}{2} - \gamma_q(x),$$

$$\begin{aligned} \text{d'où:} \quad sb_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x) - ([sb_k] + \eta_k)q_k x &= sb_k \left(qx - \frac{1}{2} - \gamma_{q_k}(x) \right) - ([sb_k] + \eta_k)q_k x \\ &= (sb_k - ([sb_k] + \eta_k)) \left(qx - \frac{1}{2} - \gamma_{q_k}(x) \right) + ([sb_k] + \eta_k) \left(\frac{1}{2} + \gamma_{q_k}(x) \right) \\ &= \pm \|sb_k\| \left(qx - \frac{1}{2} - \gamma_{q_k}(x) \right) + ([sb_k] + \eta_k) \left(\frac{1}{2} + \gamma_{q_k}(x) \right). \end{aligned}$$

Il en résulte, en tenant compte que $\frac{1}{2} + \gamma_{q_k}(x) \in \mathbb{Z}/2$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Delta_k^{(2)}(x) dx &= \int_0^1 |1 - e^{2\pi i (sb_k \tilde{\sigma}_{q_k}(x) - ([sb_k] + \eta_k) q_k x)}| dx \\
&= \sum_{j=0}^{q_k-1} \int_{\frac{j}{q_k}}^{\frac{j+1}{q_k}} |1 - e^{2\pi i (\pm \|sb_k\| (q_k x - \frac{1}{2} - \gamma_{q_k}(x)))}| dx \\
&= \sum_{j=0}^{q_k-1} \int_{\frac{j}{q_k}}^{\frac{j+1}{q_k}} |1 - e^{\pm 2\pi i \|sb_k\| (q_k(x - \frac{j}{q_k}) - \frac{1}{2})}| dx = \sum_{j=0}^{q_k-1} \frac{1}{q_k} \int_0^1 |1 - e^{\pm 2\pi i \|sb_k\| (y - \frac{1}{2})}| dy \\
&= \sum_{j=0}^{q_k-1} \frac{1}{q_k} \int_0^1 |\sin(\pi \|sb_k\| (y - \frac{1}{2}))| dy \leq \frac{\pi}{2} \|sb_k\|. \text{ t.g. d'une série convergente } \quad \square
\end{aligned}$$

Cocycles au-dessus de systèmes hyperboliques

7.5. Preuve du théorème 6.3

Proof. A_{5c} Nous utilisons l'argument appliqué par Hopf au flot géodésique et développé par Sinaï et Anosov dans l'étude du billard dispersif et des systèmes hyperboliques.

Rappelons que $\varphi \in \mathcal{F}_0$. La démonstration est analogue pour $\varphi \in \mathcal{H}_\alpha$. Nous appliquons la propriété (6.2) à l'ensemble R en prenant pour ensemble M_0 l'ensemble $M_0 = M_1(\varphi) \cap M_0(\varphi, \mathcal{H})$, où $M_1(\varphi)$ est donné par le lemme 5.2 et $M_0(\varphi, \mathcal{H})$ par le lemme 6.1.

Feuille stable pour l'action de T_φ sur $M \times G$

Soit w dans la feuille stable de $w_0 = x \in R$. D'après le lemme 5.2, on peut écrire $\varphi_n(w) - \varphi_n(x) = F^+(x, w) + \varepsilon_n^+(x, w)$, avec F^+ indépendant de n et ε_n^+ tel qu'il existe $N(x, w)$ presque partout fini pour lequel $\varepsilon_j^n(x, w) = 0$, si $n \geq N(x, w)$:

$$\begin{aligned}
T_\varphi^n(w, v) &= (T^n w, v + \varphi_n(w)) = (T^n w, v + \varphi_n(x) + F^+(x, w) + \varepsilon_n^+(x, w)) \\
&= (T^n w, v + \varphi_n(x) + F^+(x, w)), \text{ pour } n \geq N(x, w).
\end{aligned}$$

On obtient pour $n \geq N(x, w)$:

$$d(T_\varphi^n(w, u - F^+(x, w)), T_\varphi^n(x, u)) = d((T^n w, u + \varphi_n(x)), (T^n x, u + \varphi_n(x))) \rightarrow 0.$$

Par conséquent, $(w, u - F^+(x, w))$ appartient à la feuille stable de (x, u) pour l'action de T_φ sur $M \times G$.

Si $f \in \mathcal{H}$, alors $\sum_n |f(T_\varphi^n(w, u - F^+(x, w))) - f(T_\varphi^n(x, u))| < +\infty$.

La même observation est valable pour la feuille instable avec T_φ^{-1} et la fonction $F^-(x, y)$.

Application du théorème ergodique quotient

Soient x dans $M_0(\mathcal{H})$, $w \in W^s(x)$ et $f \in \mathcal{H}$.

Notons $A_n = S_n f(x, u)$, $B_n = S_n f_0(x, u)$, $C_n = S_n f(w, u - F^+(x, w))$, $D_n = S_n f_0(w, u - F^+(x, w))$, Nous avons

$$\left| \frac{S_n f(x, u)}{S_n f_0(x, u)} - \frac{S_n f(w, u - F^+(x, w))}{S_n f_0(w, u - F^+(x, w))} \right| = \left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{C_n}{D_n} \right| \leq \left| \frac{C_n}{D_n} \right| \left| \frac{D_n - B_n}{B_n} \right| + \left| \frac{A_n - C_n}{B_n} \right|.$$

Comme $\left| \frac{D_n - B_n}{B_n} \right|$ et $\left| \frac{A_n - C_n}{B_n} \right|$ tendent vers 0 et que $\left| \frac{C_n}{D_n} \right|$ est borné, le majorant dans l'inégalité précédente tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

Appliquons ce procédé pour $x \in R$ aux points $w_i = w_i(x, x_R)$ fournis par la propriété (6.2) de l'ensemble R . Nous obtenons d'abord pour w_1 et $w_0 = x$:

$$\begin{aligned} L_f^+(w_1, u) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k w_1, u + \varphi_k(x) + \varphi_k(w_1) - \varphi_k(x))}{\sum_{k=0}^{n-1} f_0(T^k w_1, u + \varphi_k(x) + \varphi_k(w_1) - \varphi_k(x))} \\ &= L_f^+(x, u + \lim_{k \rightarrow +\infty} [\varphi_k(w_1) - \varphi_k(x)]) = L_f^+(x, u + F^+(x, w_1)). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} L_f^-(w_1, u) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k} w_1, u + \varphi_{-k}(w_2) + \varphi_{-k}(w_1) - \varphi_{-k}(w_2))}{\sum_{k=0}^{n-1} f_0(T^{-k} w_1, u + \varphi_{-k}(w_2) + \varphi_{-k}(w_1) - \varphi_{-k}(w_2))} \\ &= L_f^-(w_2, u + \lim_{k \rightarrow +\infty} [\varphi_{-k}(w_1) - \varphi_{-k}(w_2)]) = L_f^-(w_2, u - F^-(w_1, w_2)). \end{aligned}$$

Pour $f \in \mathcal{H}$, comme $w_1 \in M_0(\mathcal{H})$, w_1 vérifie $L_f^+(w_1, u) = L_f^-(w_1, u)$ pour presque tout u . Il en résulte

$$\begin{aligned} L_f^+(x, u) &= L_f^+(w_1, u - F^+(x, w_1)) = L_f^-(w_1, u - F^+(x, w_1)) \\ &= L_f^-(w_2, u - F^+(x, w_1) - F^-(w_1, w_2)). \end{aligned}$$

Si $N = 2$, nous avons $w_2 = x_R$. Sinon, en réitérant le procédé jusqu'à l'étape N , nous obtenons:

$$L_f^+(x, u) = L_f^-(w_N, u - \sum_{i=1}^{N-1} [F^+(w_{i-1}, w_i) + F^-(w_i, w_{i+1})]),$$

d'où, puisque $w_N = x_R$,

$$(28) \quad L_f^+(x, u) = L_f^-(x_R, u + J(x)), \text{ pour } x \in R,$$

$$(29) \quad \text{avec } J(x) = - \sum_{i=1}^{N-1} [F^+(w_{i-1}(x, x_R), w_i(x, x_R)) + F^-(w_i(x, x_R), w_{i+1}(x, x_R))].$$

La fonction J est définie sur R μ -p.p., mesurable car par hypothèse les w_i dépendent mesurablement de x , et la relation (28) est satisfaite pour presque tout u et presque tout $x \in R$.

Posons $r_{L_f}(u) = L_f^-(x_R, u)$. On a donc $L_f^+(x, u) = r_{L_f}(u + J(x))$, pour presque tout $x \in R$.

Sur $TR \setminus R$, par invariance, on a

$$L_f^+(Tx, u) = L_f^+(x, u - \varphi(x)) = L_f^-(x_R, u - \varphi(x) + J(x)) = r_{L_f}(u - \varphi(x) + J(x)).$$

et de même sur $T^2R \setminus (R \cup TR)$,

$$L_f^+(T^2x, u) = L_f^+(x, u - \varphi_2(x)) = r_{L_f}(u - \varphi_2(x) + J(x)).$$

Considérons l'ensemble invariant $\tilde{R}$, réunion disjointe des ensembles Δ_i définis par

$$\Delta_0 := R \text{ et } \Delta_i := T^i R \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Delta_j.$$

(Dans le cas où T est ergodique $\tilde{R}$ est égal à M , à un ensemble négligeable près.)

Donc pour $y = T^i x \in \Delta_i$, nous avons $x \in R$ et

$$L_f^+(y, u) = L_f^+(T^i x, u) = L_f^+(x, u - \varphi_i(x)) = r_{L_f}(u - \varphi_i(x) + J(x)).$$

Nous obtenons une fonction mesurable γ définie presque partout sur $\tilde{R}$ en posant

$$\gamma(y) = J(T^{-i}y) - \varphi_i(T^{-i}y) \text{ sur } \Delta_i.$$

D'après la construction précédente, la relation suivante est satisfaite sur $\tilde{R}$:

$$(30) \quad L_f^+(y, u) = r_{L_f}(u + \gamma(y)), \text{ pour } \mu - \text{presque tout } y \text{ et presque tout } u.$$

Compte-tenu du lemme 6.1, nous avons ainsi obtenu pour $f \in \mathcal{H}$ sur $\tilde{R}$ une relation de la forme:

$$(31) \quad \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}\left(\frac{f}{f_0} | \mathcal{J}\right)(x, u) = L_f^+(x, u) = r_{L_f}(u + \gamma(x)), \text{ pour } \mu \text{ p.t. } x \text{ et p.t. } u.$$

Soit H_{L_f} le sous-groupe des périodes de L_f (par rapport à la seconde coordonnée).

L'invariance de $L_f(x, u)$ par T_φ implique :

$$r_{L_f}(u + \varphi(x) + \gamma(Tx)) = r_{L_f}(u + \gamma(x)), \text{ pour } \mu \text{ p.t. } x \text{ et p.t. } u.$$

Par conséquent, $\varphi(x) + \gamma(Tx) - \gamma(x) \in H_{L_f}$, pour μ p.t. x .

Passage aux fonctions invariantes

Nous avons montré que, pour $f \in \mathcal{H}$, il existe une fonction mesurable r_{L_f} sur G telle que $L_f(x, u) = r_{L_f}(u + \gamma(x))$, pour μ p.t. x et p.t. u .

Soit H_0 le sous-groupe fermé de G formé des h tel que $r_{L_f}(u+h) = r_{L_f}(u)$, p.p., $\forall f \in \mathcal{H}$.

D'après ce qui précède, $\varphi(x) + \gamma(Tx) - \gamma(x) \in H_0$ pour μ -presque tout x . Rappelons que, pour $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, $\int \int \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}(\frac{f}{f_0} | \mathcal{J}) f_0(u) d\mu(x) du = \int \int f d\mu(x) du$.

L'égalité

$$\mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}(\frac{f}{f_0} | \mathcal{J})(x, u) = L_f(x, u) = r_{L_f}(u + \gamma(x)),$$

implique

$$\int \int r_{L_f}(u + \gamma(x)) f_0(u) d\mu(x) du = \int \int f d\mu du.$$

La fonction $(x, u) \mapsto r_{L_f}(u + \gamma(x))$ est $f_0 \tilde{\mu}$ -intégrable.

Posons $f_1(u) = \int f_0(u - \gamma(x)) d\mu(x)$. La fonction r_{L_f} est intégrable pour la mesure de probabilité $f_1(u) du$. Nous avons pour $f, f' \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} & \int \left[\int |r_{L_f}(u + \gamma(x)) - r_{L_{f'}}(u + \gamma(x))| f_0(u) du \right] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int |r_{L_f}(u) - r_{L_{f'}}(u)| f_0(u - \gamma(x)) du \right] d\mu(x) \\ &= \int |r_{L_f}(u) - r_{L_{f'}}(u)| \left[\int f_0(u - \gamma(x)) d\mu(x) \right] du = \int |r_{L_f}(u) - r_{L_{f'}}(u)| f_1(u) du. \end{aligned}$$

$$(32) \quad \text{D'où: } \int |r_{L_f}(u) - r_{L_{f'}}(u)| f_1(u) du \leq \|f - f'\|_{1, \tilde{\mu}}.$$

Soit $f \in L^1(\tilde{\mu})$. Par densité de $\mathcal{H}$ dans $L^1(\tilde{\mu})$ il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{H}$ telle que $\sum_n \|f_n - f\|_1 < +\infty$. La suite $(r_{L_{f_n}})$ est donc presque partout convergente au sens de la mesure $f_1 du$, donc au sens de la mesure du , vers une limite notée r_{L_f} . Nous avons:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}(\frac{f_n}{f_0} | \mathcal{J})(x, u) = r_{L_{f_n}}(u + \gamma(x)), \\ & \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}(\frac{f_n}{f_0} | \mathcal{J})(x, u) \rightarrow \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}(\frac{f}{f_0} | \mathcal{J})(x, u), \text{ dans } L^1(f_0 \tilde{\mu}), \\ & r_{L_{f_n}}(u + \gamma(x)) \rightarrow r_{L_f}(u + \gamma(x)), \lambda(u)\text{-presque partout.} \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{\sum_{j=0}^{L-1} f(T_\varphi^j(x, u))}{\sum_{j=0}^{L-1} f_0(T_\varphi^j(x, u))} \rightarrow \mathbb{E}_{f_0 \tilde{\mu}}(\frac{f}{f_0} | \mathcal{J})(x, u) = r_{L_f}(u + \gamma(x)).$$

De plus r_{L_f} est invariante par les éléments de H_0 .

Si g est une fonction mesurable bornée T_φ -invariante, nous avons

$$g(x, u) = \frac{\sum_{j=0}^{L-1} g(T_\varphi^j(x, u)) f_0(T_\varphi^j(x, u))}{\sum_{j=0}^{L-1} f_0(T_\varphi^j(x, u))} \rightarrow r_{L_{gf_0}}(u + \gamma(x)).$$

Ceci montre que g est de la forme $g(x, u) = r_g(u + \gamma(x))$, avec r_g invariante par les éléments de H_0 , qui sont donc des périodes des fonctions mesurables bornées T_φ -invariantes. Par troncation, on obtient que ce sont des périodes de toutes les fonctions mesurables bornées.

Le sous-groupe H_0 coïncide avec le sous-groupe H des périodes des fonctions T_φ -invariantes.

On a ainsi montré que $\psi(x) := \varphi(x) + \gamma(Tx) - \gamma(x)$ appartient, pour presque tout x , au groupe H_0 des périodes des fonctions de la forme $r_g(u)$, pour g T_φ -invariante. (On a utilisé la dénombrabilité de $\mathcal{H}$ pour contrôler la validité des limites presque partout.)

La relation $g(x, u) = r_g(u + \gamma(x))$, pour g T_φ -invariante, montre que $g(x, u + h) = g(x, u)$, p.p., si $h \in H$.

Donc $H = \mathcal{E}(T, \varphi)$ et, pour presque tout x , $\psi(x) \in \mathcal{E}(T, \varphi) = \mathcal{E}(T, \psi)$, ce qui montre la régularité du cocycle (T, φ) . $\square$

8. Références

REFERENCES

- [Conze 2009] Conze (J.-P.): Recurrence, ergodicity and invariant measures for cocycles over a rotation, Contemporary Mathematics, vol. 485, AMS, Providence, RI, 2009, p. 45-70.
- [Guenais-Parreau 2006] Guenais (M.), François Parreau (F.): Valeurs propres de transformations liées aux rotations irrationnelles et aux fonctions en escalier (2006).
- [Lesigne 1993] Lesigne (E.): Equations fonctionnelles, couplage de produits gauches et théorèmes ergodiques pour mesures diagonales, Bull. S.M.F., t. 121, no 3 (1993) p. 315-351.
- [Merril 1985] Merrill (K.): Cohomology of steps functions under irrational rotations, Israel J. of Math., vol 52 no 4 (1985), p. 93-134.
- [Moore-Schmidt 1980] Moore (C. C.), Schmidt (K.) : Coboundaries and homomorphisms for non-singular actions and a problem of H. Helson. Proc. London Math. Soc. (3) 40 (1980), no. 3, 443-475.
- [K. Schmidt 1977] Schmidt (K.): Lectures on Cocycles of Ergodic Transformations Groups, Lect. Notes in Math. vol. 1, Mac Millan Co. of India (1977).