

**G-EXTENSIONS DE SYSTÈMES DYNAMIQUES
EN MESURE INFINIE**

III

**RÉCURRENCE ET ERGODICITÉ
DE COCYCLES AU-DESSUS DE ROTATIONS DE $\mathbb{T}^2$,
CONDITIONS DIOPHANTIENNES.**

JEAN-PIERRE CONZE (UNIVERSITÉ DE RENNES)

ST JACUT
22-25 JUIN 2026

CONTENTS

1. Sur la récurrence	1
1.1. Exemples de cocycles récurrents sur les rotations en dimension ≥ 1	3
1.2. Récurrence de $(S_n\varphi)$ pour $\varphi : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^d$	5
2. Ergodicité de (T_α, φ) pour $\varphi \in \mathcal{F}_2$	5
2.1. Conditions diophantiennes	5
3. Nbres mal approchables et ensembles gagnants de W. Schmidt	7
4. Annexe: démonstrations	9
4.1. Démonstration du théorème de récurrence	9
4.2. Preuve de l'ergodicité de (T_α, φ)	15
5. Références	19
References	19

1. Sur la récurrence

Une condition suffisante pour la récurrence

La question de la récurrence d'un cocycle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, est naturelle et joue un rôle clé dans la démonstration de l'ergodicité.

Considérons d'abord le cas général d'un cocycle (φ_n) engendré par une fonction $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, sur un système dynamique ergodique (M, μ, T) .

Si $d = 1$ et si φ est intégrable, une condition nécessaire et suffisante pour la récurrence de (φ_n) est $\int_M \varphi d\mu = 0$. (cf. [Atkinson1976]) Pour $d \geq 2$, la question de la récurrence est plus complexe, mais il est parfois possible de la déduire du taux de croissance du cocycle (φ_n) .

Le lemme général suivant fournit une condition suffisante simple de récurrence (cf. [Chevallier-Conze 2009]).

Lemma 1.1 (1.1). *Soit (φ_n) un cocycle sur un système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. S'il existe une suite strictement croissante d'entiers (k_n) et une suite de nombres réels $(\eta_n > 0)$ telles que :*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(x : |(S_{k_n} \varphi)(x)| \geq \eta_n) = 0 \text{ et } \eta_n = o(n^{1/d}),$$

alors le cocycle est récurrent.

En particulier, si $\varphi \in L^2(\mu)$ et $\|\varphi_n\|_2 = o(n^{\frac{1}{d}})$, le cocycle est récurrent.

Cocycles sur les rotations unidimensionnelles

Soit $\mathcal{C}$ la classe des fonctions réelles centrées à variation bornée (VB) sur $\mathbb{T}$.

Elle contient les fonctions en escalier centrées avec un nombre fini de discontinuités. Si φ appartient à $\mathcal{C}$, ses coefficients de Fourier $c_r(\varphi)$ satisfont :

$$(2) \quad c_r(\varphi) = \frac{\gamma_r(\varphi)}{r}, \forall r \neq 0, \text{ avec } K(\varphi) := \sup_{r \neq 0} |\gamma_r(\varphi)| < +\infty.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}$ muni de la variation $V(\varphi)$, pour une rotation T_α sur $\mathbb{T}$ et un dénominateur q quelconque de α , la somme ergodique φ_q sur T_α satisfait :

$$(3) \quad \|\varphi_q\|_\infty = \sup_x \left| \sum_{j=0}^{q-1} f(x + j\alpha) \right| \leq V(\varphi) \text{ (inégalité de Koksma).}$$

Dans le cadre L^2 , on a : Si φ centré dans $L^2(\mathbb{T})$ satisfait (2), alors $\|\varphi_q\|_2 \leq 2\pi K(\varphi)$.

En effet, pour $\psi(x) := \{x\} - \frac{1}{2}$, on a $\|\psi_q\|_2 \leq \|\psi_q\|_\infty \leq V(\psi) = 1$, d'après (3); Par conséquent, pour φ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_q\|_2 &= \left(\sum_{r \neq 0} \frac{|\gamma_r(\varphi)|^2}{r^2} \left| \frac{\sin \pi q r \alpha}{\sin \pi r \alpha} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K(\varphi) \left(\sum_{r \neq 0} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\sin \pi q r \alpha}{\sin \pi r \alpha} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi K(\varphi) \|\psi_q\|_2 \leq 2\pi K(\varphi). \end{aligned}$$

Lemma 1.2 (1.2). *Pour tout $s > 1$, presque tout α vérifie pour une constante finie $A = A(\alpha, s)$:*

$$(4) \quad a_n \leq A n^s, \forall n \geq 1.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}$, d'après (3), on obtient une borne sur la croissance de la somme ergodique φ_n pour presque tout α :

Proposition 1.3 (1.3). *Soit φ une fonction BV centrée sur $\mathbb{T}$. Si la condition (4) est satisfaite pour un certain $s \geq 0$ (condition vérifiée pour presque tout α), il existe une constante $K_s > 0$ telle que :*

$$(5) \quad \|\varphi_n\|_\infty \leq K_s (\log n)^{1+s}, \forall n \geq 2.$$

Lorsque α est de type 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $K(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$(6) \quad \|\varphi_n\|_\infty \leq K(\varepsilon) n^\varepsilon, \forall n \geq 1.$$

Proof. Soit (q_k) le dénominateur de α . Pour $n \geq 1$, soit $m = m(n)$ l'entier tel que $n \in [q_{m(n)}, q_{m(n)+1}[$.

Comme la croissance de la suite (q_n) est au moins exponentielle, on a $m(n) = O(\log n)$. Or, (5) et (6) découlent aisément de l'inégalité de Koksma et de la α -représentation d'Ostrowski des entiers (cf. [Ostrowski 1922]) qui s'écrit :

$$\text{si } n < q_{m+1}, \quad n = \sum_{k=0}^m b_k q_k, \quad \text{avec } 0 \leq b_0 \leq a_1 - 1, \quad 0 \leq b_k \leq a_{k+1} \text{ pour } 1 \leq k \leq m. \quad \square$$

Si φ est une fonction centrée satisfaisant (2), la proposition précédente est valable avec la norme L^2 au lieu de la norme uniforme.

1.1. Exemples de cocycles récurrents sur les rotations en dimension ≥ 1 .

1.1.1. Exemples et contre-exemples. Exemples

Pour les cocycles sur les rotations unidimensionnelles, (3) peut être utilisé pour les cocycles à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Lorsque la dimension ρ est > 1 , une estimation du taux de croissance de $\|\varphi_n\|$ peut être obtenue dans certains cas par l'analyse de Fourier sous une hypothèse sur α .

Exemple 1. (Cas $\rho = 1$) Si le cocycle (φ_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est engendré au-dessus d'une rotation unidimensionnelle par φ centrée avec des composantes BV (ou, plus généralement, satisfaisant (2)), alors il est récurrent pour toute rotation ergodique et tout $d \geq 1$ d'après l'inégalité de Koksma.

Exemple 2. (Cas produit) Soit $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ telle que φ^j , pour tout j , soit une fonction BV centrée de la variable unidimensionnelle $x_j \in \mathbb{T}$.

Dans cet exemple, l'application cylindrique sur $\mathbb{T}^\rho \times \mathbb{R}^\rho : (x, z) \rightarrow (x + \alpha, z + \varphi(x))$ est le produit des applications cylindriques sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R} : (x_i, z_i) \rightarrow (x_i + \alpha_i, z_i + \varphi^i(x_i))$. La récurrence découle alors immédiatement, pour une large classe de rotations, du lemme 1.1 et de la proposition 1.3 :

Proposition 1.4 (1.4). *Si les composantes φ^j appartiennent à la classe $\mathcal{C}$ (ou, plus généralement, satisfont (2)), pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\rho)$, avec chaque α_i de type 1, le cocycle est récurrent.*

Presque tout α étant de type 1, la conclusion est valable pour presque tout α . Cependant, cf. ci-dessous, pour φ dont les composantes appartiennent à $\mathcal{C}$, la récurrence peut ne pas être vérifiée en dimension ≥ 2 pour certains choix de α .

Exemple 3. *Cocycles transients sur une rotation bidimensionnelle*

Dans [Yo80], J.-C. Yoccoz a construit un cocycle transient centré défini par une fonction analytique sur une rotation bidimensionnelle particulière.

Le cocycle centré suivant est un autre exemple de cocycle transient (cf. [Chevallier-Conze 2009, Théorème 4.1]) : Soit $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction : $\varphi(x) = (\varphi^1(x_1), \varphi^2(x_2))$, avec $\varphi^1 = \varphi^2 = 1_{[0, \frac{1}{5}]}(\{\cdot\}) - \frac{1}{5}$. Il existe une rotation ergodique dans $\mathbb{T}^2$, $x \rightarrow x + \alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, telle que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^1(x_1 + k\alpha_1) \right| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(x_2 + k\alpha_2) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ pour presque tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2.$$

Question : Rappelons qu'une paire $\alpha \in \mathbb{R}^2$ est singulière si : $\forall \varepsilon > 0, \exists Q > 1, \forall k > Q, \exists n \leq k, d(n\alpha, \mathbb{Z}^2) \leq \varepsilon k^{-1/2}$.

Les paires singulières, et plus généralement les vecteurs singuliers, ont été définis par Khintchine, qui a démontré que l'ensemble des vecteurs singuliers est de mesure de Lebesgue nulle.

Y. Cheung [Cheung 2011] a montré que l'ensemble des paires singulières a une dimension de Hausdorff de $4/3$, et est donc relativement petit.

Dans les exemples précédents de cocycles transients, la rotation T_α sur $\mathbb{T}^2$ s'avère être associée à une paire singulière α .

Une question naturelle est de construire un cocycle transient sur une rotation définie par une paire non singulière $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Récurrence de $(S_n\varphi)$ pour $\varphi : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^d$. Récurrence pour $\varphi : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^d$

Pour simplifier les notations, nous traiterons le cas de fonctions définies sur $\mathbb{T}^2$. Le cas de $\mathbb{T}^\rho$ pour $\rho > 2$ serait analogue.

Rappelons la notation $|u|_+ := \max(|u|, 1)$, pour $u \in \mathbb{R}$. Si $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sont deux formes linéaires indépendantes, pour $h \in \mathbb{R}^2$, on pose $R(h) = R_{\ell_1, \ell_2}(h) = |\ell_1(h)|_+ |\ell_2(h)|_+$ et on définit pour $s > 1$:

$$W(\ell_1, \ell_2, s) := \{\alpha \in \mathbb{R}^2 : R(h)^s \|h \cdot \alpha\| \leq 1 \text{ pour une infinité de } h \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Definition 1.5. On note $\mathcal{G}$ la classe des fonctions centrées $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe une partition finie de $[0, 1]^2$ en triangles Δ_j telle que f admette des dérivées partielles $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ continues et bornées sur l'intérieur de chaque Δ_j .

Theorem 1.6 (1.6). Soit $\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec $\varphi^i \in \mathcal{G}$, $i = 1, \dots, d$. Alors :

- 1) $\dim_H \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 : (T_\alpha, \Phi) \text{ n'est pas récurrent}\} \leq 2 - \frac{1}{2d-1}$;
- 2) (T_α, Φ) est récurrent si α est un couple totalement irrationnel de nombres algébriques.

Remarque : La classe $\mathcal{G}$ contient notamment les fonctions $\varphi^\Delta := 1_\Delta - \mu(\Delta)$, où 1_Δ est l'indicateur d'un polygone Δ dans le tore $\mathbb{T}^2$.

2. Ergodicité de (T_α, φ) pour $\varphi \in \mathcal{F}_2$

2.1. Conditions diophantiennes. Conditions diophantiennes pour l'ergodicité

Definition 2.1. $\mathcal{F}_2$ est la classe des fonctions centrées $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ telles que, pour deux ensembles finis J_1, J_2 dépendant de φ : $J_i = \{\beta_0^i = 0 \leq \beta_1^i < \dots < \beta_{r_i-1}^i \leq \beta_{r_i}^i = 1\}$, $i = 1, 2$, φ est C^1 sur les éléments de la partition $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\varphi$ de $[0, 1] \times [0, 1]$ en rectangles ouverts $P_{j,j'} =]\beta_j^1, \beta_{j+1}^1[\times]\beta_{j'}^2, \beta_{j'+1}^2[$, $j = 0, \dots, r_1 - 1, j' = 0, \dots, r_2 - 1$.

De plus, nous supposons que les dérivées partielles de φ^i , $i = 1, 2$, peuvent être prolongées en fonctions continues sur l'adhérence des éléments de $\mathcal{P}_\varphi$.

Nous associons à la fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{F}_2$ les quantités suivantes :

$$\lambda_1(\varphi^i) := \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1} dx, \quad \lambda_2(\varphi^i) := \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2} dx, \quad i = 1, 2.$$

Par unique ergodicité de la rotation et puisque $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2}$ sont Riemann-intégrables, on a uniformément pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$:

$$(7) \quad \lambda_j(\varphi^i) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(T^k(x_1, x_2)), \quad i, j = 1, 2.$$

Hypothèse (H) sur α et sur les discontinuités β_j^i

$$(8) \quad \beta_j^i - \beta_{j'}^i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i), \quad \forall j, j' \in \{1, \dots, r_i\}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

En particulier, $0 \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i)$, autrement dit α_1 et α_2 appartiennent à Bad .

On verra que

- étant donné α , avec α_1 et α_2 appartenant à Bad , l'ensemble des $(\beta_j^i, j = 1, \dots, r_i, i = 1, 2)$ satisfaisant (8) a pour dimension de Hausdorff dans $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ $r_1 + r_2$;
- étant donné $(\beta_j^i, j = 1, \dots, r_i, i = 1, 2)$, l'ensemble des α tels que la condition (H) soit vérifiée a une dimension de Hausdorff égale à 2.

Exemple Soit $\gamma_1 < \gamma_2 \in [1, 2[$. Considérons la fonction $\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}(x_1, x_2) = \{\gamma_1 x_1\}\{\gamma_2 x_2\}$ restreinte à $[0, 1[\times [0, 1[$. Par un calcul élémentaire, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{\gamma_1, \gamma_2} dx_1 dx_2 &= \mu(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) = \left(\frac{1}{2}\gamma_1 - 1 + \gamma_1^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_2 - 1 + \gamma_2^{-1}\right), \\ \lambda_1(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) &= \gamma_1\left(\frac{1}{2}\gamma_2 - 1 + \gamma_2^{-1}\right), \quad \lambda_2(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) = \gamma_2\left(\frac{1}{2}\gamma_1 - 1 + \gamma_1^{-1}\right). \end{aligned}$$

Notons $\varphi^1 := \varphi_{\gamma_1, \gamma_2} - \mu(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2})$, $\varphi^2 := \varphi_{1,1} - \frac{1}{4}$. La fonction $\Phi := (\varphi^1, \varphi^2)$ est dans $\mathcal{F}_2$.

Les ensembles J_1 et J_2 de la définition de $\mathcal{F}_2$ dans 2.1 sont :

$$J_1 = \{\beta_0^1 = 0 < \beta_1^1 = \gamma_1^{-1} < \beta_2^1 = 1\}, \quad J_2 = \{\beta_0^2 = 0 < \beta_1^2 = \gamma_2^{-1} < \beta_2^2 = 1\}.$$

Si α_1 et α_2 appartiennent à l'ensemble Bad , la l'hypothèse (H) est vérifiée si γ_i est rationnel ou plus généralement si $\gamma_i^{-1} \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i)$, $i = 1, 2$.

De plus, si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ et $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \neq 1$, alors :

$$\lambda_1(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2})\lambda_2(\varphi_{1,1}) - \lambda_2(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2})\lambda_1(\varphi_{1,1}) = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)\left(1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right) \neq 0.$$

Pour tout $n \geq 1$, en écrivant les ensembles de nombres $(\{\beta_j^i - \ell \alpha_i\}, j \in J_i, 0 \leq \ell < n)$, $i = 1, 2$, comme un ensemble ordonné $(\gamma_{n,\ell}^i)_{\ell=1, \dots, p_{i,n}}$, avec $p_{i,n} = r_i n$, les atomes de

$$\mathcal{P}_{\varphi}^n := \mathcal{P}_{\varphi} \wedge T_{\alpha}^{-1} \mathcal{P}_{\varphi} \wedge \dots \wedge T_{\alpha}^{-(n-1)} \mathcal{P}_{\varphi}$$

sont les rectangles

$$(9) \quad R_{\ell, \ell'}^n =]\gamma_{n,\ell}^1, \gamma_{n,\ell+1}^1[\times]\gamma_{n,\ell'}^2, \gamma_{n,\ell'+1}^2[.$$

Pour tout $n \geq 1$, les sommes ergodiques φ_n sont de classe C^1 sur les atomes $R_{\ell, \ell'}^n$.

Nous noterons $\tilde{\mathcal{P}}_\varphi^n$ la partition $T_\alpha^n \mathcal{P}_\varphi^n$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemma 2.2 (2.2). *Soit $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ dans $\mathcal{F}_2$. Si $x = (x_1, x_2)$ et $x+u = (x_1+u_1, x_2+u_2)$ appartiennent au même élément de la partition $\mathcal{P}_\varphi^n$, nous avons uniformément en x , pour $i = 1, 2$:*

$$\varphi_n^i(x+u) - [\varphi_n^i(x) + (\lambda_1(\varphi^i)u_1 + \lambda_2(\varphi^i)u_2)n] = o_{n \rightarrow \infty}(n)|u| + o_{u \rightarrow 0}(u)|u|n.$$

Proof. Par hypothèse sur x et $x+u$, leurs images $T_\alpha^k x$ et $T_\alpha^k(x+u)$, pour $0 \leq k < n$, appartiennent au même rectangle $P_{j,j'}$ pour certains j, j' . Pour $i = 1, 2$, comme les dérivées partielles de φ^i peuvent être prolongées en fonctions continues sur l'adhérence de $P_{j,j'}$, par un développement de Taylor au premier ordre, on a uniformément en x :

$$\varphi^i(T_\alpha^k(x+u)) - [\varphi^i(T_\alpha^k x) + u_1 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1}(T_\alpha^k x) + u_2 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2}(T_\alpha^k x)] = o_{u \rightarrow 0}(u)|u|.$$

Il s'ensuit :

$$\varphi_n^i(x+u) - [\varphi_n^i(x) + u_1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1}(T_\alpha^k x) + u_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2}(T_\alpha^k x)] = o_{u \rightarrow 0}(u)|u|n.$$

En utilisant (7), on obtient le résultat. $\square$

Theorem 2.3 (2.3 ([Chevallier-Conze 2026])). *Soit $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{F}_2$ tel que :*

$$\lambda_1(\varphi^1)\lambda_2(\varphi^2) - \lambda_2(\varphi^1)\lambda_1(\varphi^2) \neq 0.$$

A) *Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ totalement irrationnel. Supposons (8) vérifiée par les discontinuités de φ^1, φ^2 .*

Si le cocycle (T_α, φ) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ engendré par $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ au-dessus de la rotation T_α de $\mathbb{T}^2$ est récurrent, alors il est ergodique.

B) *Supposons que φ^1 et φ^2 admettent des dérivées partielles continues et bornées du second ordre à l'intérieur de leur domaine de continuité.*

Pour des discontinuités β_j données, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tels que le cocycle (T_α, φ) soit ergodique est de dimension de Hausdorff 2.

Exemple algébrique : Si α_1 et α_2 sont quadratiques, la récurrence découle du théorème 1.6 2). Comme α_1 et α_2 appartiennent à Bad, on obtient l'ergodicité du cocycle défini dans l'exemple 2.1. Ceci donne un exemple explicite de cocycle ergodique.

3. Nbres mal approchables et ensembles gagnants de W. Schmidt

Sur les nombres mal approchables

Voyons comment les résultats de W. M. Schmidt [W. M. Schmidt 1966], combinés à ceux de J. Tseng [Tseng 2009] ou de M. Einsiedler et J. Tseng [Einsiedler-Tseng 2011], fournissent des informations sur les nombres “mal approchables”.

Attention: la terminologie et la notation utilisées dans cette section sont celles des “jeux de Schmidt” : α est un nombre appartenant à $]0, 1[$ et θ est un nombre irrationnel.

Proposition 3.1 (3.1). *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel. Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \beta_i \text{ et } \beta_j - \beta_i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta), \text{ pour tout } 1 \leq i < j \leq n\}$.*

Alors $\dim_H \mathcal{B}_n = n$.

Proof. Nous utilisons les résultats suivants de W. M. Schmidt [W. M. Schmidt 1966] concernant les sous-ensembles α -gagnants dans $\mathbb{R}$:

- i) *Si $X \subset \mathbb{R}$ est α -gagnant pour un certain $\alpha \in]0, 1[$, alors $\dim_H X = 1$.*
- ii) *L'image bi-lipschitzienne d'un sous-ensemble α -gagnant est α -gagnante.*
- iii) *Toute intersection finie ou dénombrable de sous-ensembles α -gagnants est α -gagnante.*

Nous procédons par récurrence pour démontrer la proposition. On a $\mathcal{B}_1 = \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ qui est $\frac{1}{8}$ -gagnant pour tout nombre irrationnel θ , d'après un résultat de J. Tseng [Tseng 2009] ; par conséquent, $\dim_H \mathcal{B}_1 = 1$.

Supposons maintenant que $\mathcal{B}_n$ soit de dimension de Hausdorff n . Soit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{B}_n$. Considérons l'ensemble : $E_\beta = \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) \cap (\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) + \beta_1) \cdots \cap (\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) + \beta_n)$.

Si $\beta_{n+1} \in E_\beta$, alors $\beta_{n+1} \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $\beta_{n+1} - \beta_i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$, de sorte que $(\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}) \in \mathcal{B}_{n+1}$.

D'après ii) et iii), E_β est $\frac{1}{8}$ -gagnant, ce qui implique que $\dim_H E_\beta = 1$.

D'après le corollaire 7.12 de [Falconer 1997], il s'ensuit que $\dim_H \mathcal{B}_{n+1} = \dim_H \mathcal{B}_n + 1 = n + 1$.

Remarque : Si $\theta \in \text{Bad}$, puisque $0 \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$, la même conclusion reste valable si la condition $1 \leq i < j \leq n$ est remplacée par $1 \leq i, j \leq n$.

Proposition 3.2 (3.2). *Soit $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

:

- a) $1, \theta_1, \theta_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$,
- b) θ_1 a des quotients partiels bornés (c.-à-d., $\theta_1 \in \text{Bad}$),
- c) Les différences $\beta_j - \beta_{j'}$, $j, j' \in \{1, \dots, r\}$, appartiennent à $\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_1)$,
est gagnant et a donc une dimension de Hausdorff de 2.

Proof. D'après un résultat de M. Einsiedler et J. Tseng ([Einsiedler-Tseng 2011, Theorem 1.1]), étant donné $\beta \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\beta \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_1)$ est α -gagnant, pour un certain paramètre de gain $\alpha > 0$ indépendant de β .

D'après iii), il s'ensuit que l'ensemble

$$E(\beta_1, \dots, \beta_r) = \{\theta_1 \in \mathbb{R} : \beta_j - \beta_{j'} \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_1), j, j' \in \{1, \dots, r_1\}\}$$

est gagnant, ce qui implique que $E(\beta_1, \dots, \beta_{r_1}) \times \mathbb{R}$ est gagnant en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Puisque les ensembles des (θ_1, θ_2) tels que a) et b) soient vérifiés sont gagnants, ceci termine la démonstration. $\square$

Corollary 3.3 (3.3). *Soit $\beta_1^1, \dots, \beta_{r_1}^1, \beta_1^2, \dots, \beta_{r_2}^2 \in \mathbb{R}$.*

L'ensemble des éléments $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

- a) $1, \theta_1, \theta_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$,*
- b) θ_i, θ_2 ont des quotients partiels bornés (c.-à-d., $\theta_i \in \text{Bad}$),*
- c) les différences $\beta_j^i - \beta_{j'}^i, j, j' \in \{1, \dots, r_i\}$, appartiennent à $\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_i)$, $i = 1, 2$, est gagnant et a donc une dimension de Hausdorff de 2.*

4. Annexe: démonstrations

4.1. Démonstration du théorème de récurrence. Annexe

La preuve du théorème repose sur les résultats suivants:

Lemma 4.1 (4.5). *Soient $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux formes linéaires indépendantes. Soit $s > 1$ et soit $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$ totalement irrationnel. Alors,*

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} < \infty, \forall t \in]1, 2/s[.$$

Proposition 4.2 (4.2). *Soient $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux formes linéaires indépendantes Notons $R(h) = R_{\ell_1, \ell_2}(h) := |\ell_1(h)|_+ |\ell_2(h)|_+$ pour $h \in \mathbb{R}^2$. Soit $1 < t < 2$. Alors*

$$\dim_H \{\alpha \in \mathbb{R}^2 : \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty\} \leq \frac{3t+2}{t+2} < 2.$$

Proposition 4.3 (4.3). *Si $\varphi \in \mathcal{G}$, il existe une constante C et $2m$ formes linéaires $\ell_1^\varphi, \dots, \ell_{2m}^\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telles que ℓ_{2k-1}^φ et ℓ_{2k}^φ sont linéairement indépendantes, pour $k = 1, \dots, m$, et telles que les coefficients de Fourier de φ satisfont*

$$(10) \quad |c_n(\varphi)| \leq C \sum_{k=1}^m \frac{1}{|\ell_{2k-1}^\varphi(n)|_+ |\ell_{2k}^\varphi(n)|_+}, \forall n \in \mathbb{Z}_*^2.$$

A₁ Preuve des propositions

Pour la proposition 4.2, deux lemmes sont nécessaires.

Le premier découle directement du lemme de Hausdorff-Cantelli (voir [4]). Le second lemme est adapté de Niederreiter [Niederreiter 1972].

Lemma 4.4 (4.4). *Soient $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux formes linéaires indépendantes et soit $s > 1$. Alors, $\dim_H W(\ell_1, \ell_2, s) \leq \frac{3+s}{1+s}$.*

Proof. Etant donné $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{Z}_*^2$, l'ensemble $L(h) = \{x \in \mathbb{T}^2 : h.x \in \mathbb{Z}\}$ est une union de $\text{pgcd}(h_1, h_2)$ tores unidimensionnels.

La longueur totale de $L(h)$ est la norme euclidienne $|h|$ de h .

L'ensemble $V(s, h) := \{x \in \mathbb{T}^2 : R(h)^s \|h.x\| \leq 1\}$ est inclus dans une bande autour de $L(h)$ de largeur $\frac{1}{|h|R(h)^s}$ et peut être recouvert par $n(h) = |h|^2 R(h)^s$ boules de rayon $r(h) = \frac{4}{|h|R(h)^s}$.

D'après le lemme de Hausdorff-Cantelli, pour $t > 0$, si

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} n(h) r(h)^t = 4^t \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |h|^{2-t} R(h)^{s-st} < \infty,$$

alors la dimension de Hausdorff de $W(\ell_1, \ell_2, s)$ est $\leq t$.

Pour $0 < t < 2$, en utilisant l'équivalence des normes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |h|^{2-t} R(h)^{s-st} &\leq C \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} (|\ell_1(h)| + |\ell_2(h)|)^{2-t} R(h)^{s-st} \\ &= C \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} (|\ell_1(h)| + |\ell_2(h)|)^{2-t} (|\ell_1(h)|_+ |\ell_2(h)|_+)^{s(1-t)}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de majorer la série

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |\ell_i(h)|^{2-t} (|\ell_1(h)|_+ |\ell_2(h)|_+)^{s(1-t)}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

L'ensemble $\Lambda = \{(\ell_1(h), \ell_2(h)) : h \in \mathbb{Z}^2\}$ est un treillis de $\mathbb{R}^2$.

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x_i < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\text{Card } \Lambda \cap (x + P) \leq C'$ pour une certaine constante C' , on a pour $1 < t < 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |\ell_1(h)|^{2-t} (|\ell_1(h)|_+ |\ell_2(h)|_+)^{s(1-t)} &= \sum_{(x_1, x_2) \in \Lambda \setminus \{0\}} |x_1|^{2-t} (|x_1|_+ |x_2|_+)^{s(1-t)} \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \sum_{(x_1, x_2) \in (\Lambda \setminus \{0\}) \cap ((n_1, n_2) + P)} |x_1|^{2-t} (|x_1|_+ |x_2|_+)^{s(1-t)} \\ &\leq C' \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} (|n_1|_+)^{2-t} (|n_1|_+ |n_2|_+)^{s(1-t)} = C' \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |n_1|_+^{2-t+s(1-t)} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} |n_2|_+^{s(1-t)}. \end{aligned}$$

Le produit des deux séries est fini lorsque $s(1-t) < -1$ et $2-t+s(1-t) < -1$. Comme $s > 1$, ces conditions sont satisfaites lorsque $2 > t > \max(\frac{1+s}{s}, \frac{3+s}{1+s}) = \frac{3+s}{1+s}$.

La conclusion est la même pour $i = 2$. $\square$

Lemma 4.5 (4.5). *Soient $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux formes linéaires indépendantes. Soit $s > 1$ et soit $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$ totalement irrationnel. Alors,*

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} < \infty, \forall t \in]1, 2/s[.$$

Proof. Puisque α est totalement irrationnel et puisque $R_{\ell_1, \ell_2}(h)^s \|h \cdot \alpha\| \leq 1$ n'admet qu'un nombre fini de solutions $h \in \mathbb{Z}^2$ pour $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $h \in \mathbb{Z}_*^2$, $R(h)^s \|h \cdot \alpha\| \geq c$.

Estimons la somme
$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2 : |\ell_i(h)|_+ \leq n_i, i=1,2} \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^t}, \text{ pour } n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2, n_1, n_2 \geq 1.$$

Remarquons que $|||x| - |y||| = \min(\|x - y\|, \|x + y\|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (où $\|u\| = \inf |u - n|$, pour $u \in \mathbb{R}$). Pour tout couple (h, h') tel que $h \neq h'$ et que h, h' sont dans le domaine de sommation, on a $|\ell_i(h \pm h')|_+ \leq |\ell_i(h)|_+ + |\ell_i(h')|_+ \leq 2n_i$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} |||h \cdot \alpha| - |h' \cdot \alpha||| &= \min(\|(h - h') \cdot \alpha\|, \|(h + h') \cdot \alpha\|) \\ &\geq c \min(R(h - h')^{-s}, R(h + h')^{-s}) \geq \frac{c}{(2n_1)^s (2n_2)^s}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\delta = \frac{c}{4^s n_1^s n_2^s}$, chaque intervalle $[k\delta, (k+1)\delta[$, $k = 1, \dots, \lceil 1/\delta \rceil$ contient au plus un point $\|h \cdot \alpha\|$ avec h appartenant au domaine de sommation.

On a également $\|h \cdot \alpha\| \geq \frac{c}{R(h)^s} \geq \frac{c}{n_1^s n_2^s}$ pour h appartenant au domaine de sommation.

Puisque $t > 1$, on a :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2 : |\ell_i(h)|_+ \leq n_i, i=1,2} \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^t} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k\delta)^t} \leq C \frac{1}{\delta^t}.$$

En utilisant l'inégalité :

$$\sum_{(n_1, n_2) : n_i \geq |\ell_i(h)|_+, i=1,2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3} \geq \frac{c'}{|\ell_1(h)|_+^2 |\ell_2(h)|_+^2} = \frac{c'}{R(h)^2},$$

satisfaite pour une certaine constante $c' > 0$, on obtient :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} \leq C \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^t} \sum_{(n_1, n_2) : n_i \geq |\ell_i(h)|_+, i=1,2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3}.$$

Ensuite, en permutant l'ordre de sommation, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} &\leq \frac{C}{c'} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2 : |\ell_i(h)|_+ \leq n_i, i=1,2} \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^t} \\ &\leq C' \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3} \frac{1}{\delta^t} \leq C' \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{n_1^{3-ts} n_2^{3-ts}}. \end{aligned}$$

La dernière série converge si $3 - ts > 1$, c'est-à-dire si $t < 2/s$. $\square$

Démonstration de la proposition 4.2

Soit $1 < t < 2$ et $s \in (1, 2/t)$. D'après le lemme 4.4, la dimension de Hausdorff de l'ensemble $W(\ell_1, \ell_2, s)$ est $\leq \frac{3+s}{1+s}$. D'après le lemme 4.5, si $\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty$, avec $1 < t < 2/s$, alors $\alpha \in W(\ell_1, \ell_2, s)$. Par conséquent, on a :

$$\dim_H \{ \alpha \in \mathbb{R}^2 : \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty \} \leq \inf_{1 < s < 2/t} \frac{3+s}{1+s} = \frac{3+2/t}{1+2/t}. \quad \square$$

Démonstration de la proposition 4.3 (Majoration des coefficients de Fourier)

D'après la définition de $\mathcal{G}$, il suffit de démontrer (10) lorsque la fonction f est supportée par un triangle Δ tel que f admette des dérivées partielles continues et bornées $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}$ sur l'intérieur de Δ . En utilisant des translations, des symétries autour de l'axe vertical et en coupant le triangle selon une droite verticale passant par l'un de ses sommets, on peut le réduire aux triangles $\Delta = \Delta(a, b, c)$ où $(0, 0), (a, b), (0, c)$ sont les sommets de Δ et a, b, c sont des nombres réels tels que $0 < a, c \leq 1$ et $c - 1 \leq b \leq 1$. Nous sommes donc ramenés à montrer la proposition suivante :

Proposition 4.6 (4.6). *Soit f une fonction à support dans $\Delta(a, b, c)$, ayant des dérivées partielles $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}$ continues et bornées sur l'intérieur de $\Delta(a, b, c)$. Alors ses coefficients de Fourier $c_f(s, t) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-2\pi i(sx + ty)} dx dy$ satisfont, pour une constante finie K ,*

$$|c_f(s, t)| \leq K \left(\frac{1}{|t|_+ |s|_+} + \frac{1}{|t|_+ |bt + as|_+} + \frac{1}{|t|_+ |(b - c)t + as|_+} \right), \quad \forall s, t \in \mathbb{Z}.$$

Proof. On a

$$c_f(s, t) = \int_0^a I_t(x) e^{-2\pi i s x} dx, \quad \text{avec } I_t(x) = \int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x+c} f(x, y) e^{-2\pi i t y} dy.$$

Pour $t \neq 0$, l'intégration par parties donne :

$$I_t(x) = \frac{1}{-2\pi i t} [A_t(x) - B_t(x) - C_t(x)],$$

où :

$$\begin{aligned} A_t(x) &= f(x, \frac{b-c}{a}x + c) e^{-2\pi i t (\frac{b-c}{a}x + c)}, \\ B_t(x) &= f(x, \frac{b}{a}x) e^{-2\pi i t \frac{b}{a}x}, \quad C_t(x) = \int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy. \end{aligned}$$

Si $t(b-c) + sa \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \int_0^a A_t(x) e^{-2\pi i s x} dx &= e^{-2\pi i t c} \int_0^a f(x, \frac{b-c}{a}x + c) e^{-2\pi i (t(\frac{b-c}{a} + s)x)} dx \\ &= \frac{a}{-2\pi i (t(b-c) + sa)} [f(a, b) e^{-2\pi i (tb + sa)} - f(0, c) e^{-2\pi i t c} \\ &\quad - e^{-2\pi i t c} \int_0^a (f'_x(x, \frac{b-c}{a}x + c) + \frac{b-c}{a} f'_y(x, \frac{b-c}{a}x + c) e^{-2\pi i (t(\frac{b-c}{a} + s)x)} dx]. \end{aligned}$$

Si $tb + sa \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^a B_t(x) e^{-2\pi i s x} dx &= \int_0^a f(x, \frac{b}{a}x) e^{-2\pi i (t\frac{b}{a} + s)x} dx \\ &= \frac{a}{-2\pi i (tb + sa)} [f(a, b) e^{-2\pi i (tb + sa)} - f(0, 0) \\ &\quad - \int_0^a (f'_x(x, \frac{b}{a}x) + \frac{b}{a} f'_y(x, \frac{b}{a}x)) e^{-2\pi i (t\frac{b}{a} + s)x} dx]. \end{aligned}$$

Si $s \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^a C_t(x) e^{-2\pi i s x} dx &= \int_0^a (\int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy) e^{-2\pi i s x} dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i s} [- \int_0^c f'_y(0, y) e^{-2\pi i t y} dy \\ &\quad - \int_0^a \frac{d}{dx} (\int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy) e^{-2\pi i s x} dx]. \end{aligned}$$

Le dernier intégrande ci-dessus est uniformément borné par rapport à t, s d'après :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy) &= \frac{b-c}{a} f'_y(x, \frac{b-c}{a}x + c) e^{-2\pi i t (\frac{b-c}{a}x + c)} \\ &\quad - \frac{b}{a} f'_y(x, \frac{b}{a}x) e^{-2\pi i t \frac{b}{a}x} + \int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f''_{yx}(x, y) e^{-2\pi i t y} dy. \end{aligned}$$

Le calcul précédent montre que, pour une constante finie K , si $|t| \geq 1$, $|t(b-c) + sa| \geq 1$, $|tb + sa| \geq 1$ et $|s| \geq 1$, alors

$$|c_f(s, t)| \leq \frac{K}{|t|_+ |t(b-c) + sa|_+} + \frac{K}{|t|_+ |tb + sa|_+} + \frac{K}{|t|_+ |s|_+}.$$

Si $t \neq 0$, puisque Les intégrales suivantes :

$$|\int_0^a A_t(x) e^{-2\pi i s x} dx|, |\int_0^a B_t(x) e^{-2\pi i s x} dx|, |\int_0^a C_t(x) e^{-2\pi i s x} dx|$$

sont bornées par une constante ne dépendant que de f .

L'inégalité ci-dessus est vérifiée de même lorsque $|t(b - c) + sa| \leq 1$, $|tb + sa| \leq 1$ ou $|s| \leq 1$.

De même, si $t = 0$ et $s \neq 0$, alors $|c_f(s, 0)| \leq \frac{K}{|s|_+}$, pour une constante K .

4.7. Démonstration du théorème de récurrence 1.6

1) Avec $\varphi = \varphi_i$, soient $\ell_1^\varphi, \dots, \ell_{2m}^\varphi$ les formes linéaires données par la proposition 4.3. Soit $0 < t < 2$. Si α n'appartient pas à l'ensemble

$$E_\varphi^t := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^2 : \sum_{k=1}^m \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{(|\ell_{2k-1}^\varphi(h)|_+ |\ell_{2k}^\varphi(h)|_+)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty \right\},$$

alors par (10)

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{|c_h(\varphi)|^2}{\|h \cdot \alpha\|^t} &\leq C^2 \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{|\ell_{2k-1}^\varphi(h)|_+ |\ell_{2k}^\varphi(h)|_+} \right)^2 \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^t} \\ &\leq C^2 m \sum_{k=1}^m \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{(|\ell_{2k-1}^\varphi(h)|_+ |\ell_{2k}^\varphi(h)|_+)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} < \infty. \end{aligned}$$

Puisque φ est centrée, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(\cdot + k\alpha) \right\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} c_h(\varphi) e^{2i\pi \langle h, \cdot + k\alpha \rangle} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |c_h(\varphi)|^2 \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k \langle h, \alpha \rangle} \right|^2 \leq \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |c_h(\varphi)|^2 \inf(N, \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|})^2 \\ &\leq \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |c_h(\varphi)|^2 (N^{1-t/2} \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^{t/2}})^2 \leq N^{2-t} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{|c_h(\varphi)|^2}{\|h \cdot \alpha\|^t}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si $2 - \frac{2}{d} < t < 2$ et $\alpha \notin \cup_{i=1}^d E_{\varphi_i}^t$, alors $\left\| \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(\cdot + k\alpha) \right\|_2^2 = O(N^{2-t}) = o(N^{\frac{2}{d}})$, ce qui implique que le cocycle $(\Phi_{n,\alpha})_n$ est récurrent d'après le lemme 1.1.

Par conséquent, si $\alpha \notin \bigcap_{2-\frac{2}{d} < t < 2} \bigcup_{i=1}^d E_{\varphi_i}^t$, (T_α, Φ) est récurrent.

Enfin, d'après la proposition 4.2,

$$\dim_H \left(\bigcap_{2-\frac{2}{d} < t < 2} \bigcup_{i=1}^d E_{\varphi_i}^t \right) \leq \inf_{2-\frac{2}{d} < t < 2} \frac{3 + 2/t}{1 + 2/t} = \frac{3 + 2/(2 - \frac{2}{d})}{1 + 2/(2 - \frac{2}{d})} = 2 - \frac{1}{2d - 1}.$$

2) Si α est algébrique, d'après le théorème de W. Schmidt [Théorème 2][W. M. Schmidt 1970] sur l'approximation simultanée des nombres algébriques par des rationnels, $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$ pour $s = 1 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 4.5, ceci entraîne :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} < \infty, \forall t \in]1, \frac{2}{1 + \varepsilon}[$$

et, comme précédemment, en prenant ε suffisamment petit, on obtient la récurrence en toute dimension d d'après le lemme 1.1. $\square$

4.2. Preuve de l'ergodicité de (T_α, φ) .

4.8. Preuve de l'ergodicité de (T_α, φ)

Dans la démonstration de l'ergodicité, nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemma 4.9 ([K. Schmidt 1977], Proposition 3.8). *Si $K \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble compact tel que $K \cap \mathcal{E}(\varphi) = \emptyset$, il existe un ensemble B de mesure positive tel que $\mu(B \cap T^{-n}B \cap (\varphi_n \in K)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Lemma 4.10. *Sous l'hypothèse (H), il existe deux constantes $0 < c \leq c'$ telles que :*

$$(11) \quad \frac{c}{n} \leq \gamma_{n,\ell+1}^1 - \gamma_{n,\ell}^1 \leq \frac{c'}{n}, \forall n \geq 1, \ell = 1, \dots, p_{1,n}.$$

4.11 (A_2 Preuve du lemme 4.9).

L'hypothèse implique l'existence, pour tout $z \in K$, d'un sous-ensemble B_z de mesure positive dans X et d'un voisinage U_z de l'origine tels que : $\varphi_n^{B_z}(x) \notin U_z + z, \forall n \geq 0, \forall x \in B_z$.

Pour tout $z \in K$, soit V_z un voisinage de l'origine tel que $V_z + V_z \subset U_z$. Par compacité de K , il existe un nombre fini de points $z_1, \dots, z_\ell$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^\ell (V_{z_i} + z_i)$.

Supposons que, pour $r < \ell$, nous ayons construit un sous-ensemble D_{r-1} de mesure positive tel que les valeurs du cocycle $(\varphi_{D_{r-1}}^n)$ n'appartiennent jamais à $V_{z_i} + z_i$, pour $i = 1, \dots, r-1$. Nous allons construire $D_r \subset D_{r-1}$ de mesure positive tel que les valeurs de $(\varphi_{D_r}^n)$ n'appartiennent jamais à $V_{z_r} + z_r$.

Par ergodicité de T , il existe $k \geq 1$ et $D' \subset D_{r-1}$ de mesure positive tels que $T^k D' \subset B_{z_r}$. D'après le théorème de Lusin, il existe un sous-ensemble D_r de D' de mesure positive tel que $\varphi_k(x) - \varphi_k(y) \in V_{z_r}, \forall x, y \in D_r$.

Pour $k, n \geq 0$, la relation de cocycle $\varphi_n(x) = \varphi_k(x) + \varphi_n(T^k x) - \varphi_k(T^n x)$ est vérifiée.

Par conséquent, si $x, T^n x \in D_r$, alors $\varphi_k(T^n x) - \varphi_k(x) \in V_{z_r}$, d'où $\varphi_n(T^k x) \in V_{z_i} + \varphi_n(x)$.

Comme $T^k x, T^{k+n} x \in B_{z_r}$, de plus $\varphi_n(T^k x)$ est une valeur du cocycle induit $\varphi_{B_{z_r}}^n$ et donc $\notin U_{z_r} + z_r$.

Il s'ensuit que $\varphi_n(x) \notin V_{z_r} + z_r$, car sinon, $\varphi_n(T^k x) \in V_{z_r} + V_{z_r} + z_r \subset U_{z_r} + z_r$, ce qui est contradictoire. Nous concluons que $\varphi_{D_r}^n$ ne prend jamais ses valeurs dans $V_{z_r} + z_r$.

De plus, puisque D_r est un sous-ensemble de D_{r-1} , les valeurs du cocycle induit $(\varphi_{D_r}^n)$ sont incluses dans celles de $(\varphi_{D_{r-1}}^n)$, et n'appartiennent donc jamais à $V_{z_i} + z_i$, pour $i = 1, \dots, r-1$.

Par conséquent, D_r possède la propriété souhaitée. Par récurrence sur r , il s'ensuit qu'il existe un ensemble D_ℓ tel que les valeurs de $(\varphi_{D_\ell}^n)$ n'appartiennent jamais à $V_{z_i} + z_i$, pour $i = 1, \dots, \ell$.

Comme $K \subset \cup_{i=1}^\ell (V_{z_i} + z_i)$, les valeurs de $(\varphi_{D_\ell}^n)$ n'appartiennent jamais à K et $B := D_\ell$ satisfait l'énoncé du lemme. $\square$

4.12 (Preuve du lemme 4.10).

D'après (H), il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $j, j' \in \{1, \dots, r_1\}$ et tous $k \in \{1, \dots, n\}$, $\|k\alpha_1 - (\beta_j^1 - \beta_{j'}^1)\| \geq \frac{c}{n}$.

Par conséquent, pour tout $1 \leq j, j' \leq r_1$ et tout $0 \leq k, k' \leq n$, si $\beta_j + k\alpha_1 \neq \beta_{j'} + k'\alpha_1 \pmod{\mathbb{Z}}$, alors $\|\beta_j + k\alpha_1 - (\beta_{j'} + k'\alpha_1)\| \geq \min(\frac{c}{n}, \delta) \geq \frac{\min(c, \delta)}{n}$, avec $\delta = \min_{j \neq j'} \|\beta_j - \beta_{j'}\|$.

Pour le membre de droite de (11), il suffit de montrer que, pour tout entier positif q , le plus grand écart dans $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, q\alpha_1\}$ est au plus $\frac{c'}{q}$ pour une certaine constante c' .

Premièrement, avec $j = j'$, on obtient que $\|n\alpha_1\| \geq \frac{c}{n}$, pour tout $n \geq 1$.

Ensuite, soit $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 0}$ la suite des convergents de α_1 . Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1}|q_n\alpha_1 - p_n| = q_{n+1}\|q_n\alpha_1\| \leq 1$ et $q_n\|q_n\alpha_1\| \geq c$, on a : $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leq \frac{1}{c}$ et $|k\frac{p_n}{q_n} - k\alpha_1| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$ pour tout $0 \leq k \leq q_n$.

Cela implique que l'écart maximal dans $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, q_n\alpha_1\}$ est au plus égal à $\frac{1}{q_n} + \frac{2}{q_{n+1}} \leq \frac{3}{q_n}$. Par conséquent, pour tout $q_n \leq q \leq q_{n+1}$, l'écart maximal dans $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, q\alpha_1\}$ est au plus égal à $\frac{3}{q_n} \leq \frac{3}{cq}$. $\square$

4.13. Preuve du théorème 2.3

A) D'après le lemme 4.10, l'hypothèse (H) implique l'existence de deux constantes positives c et c' telles que :

$$(12) \quad \frac{c}{n} \leq \gamma_{n, \ell+1}^i - \gamma_{n, \ell}^i \leq \frac{c'}{n}, \quad \ell = 1, \dots, |J^i|n, \quad i = 1, 2.$$

Pour $x \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus \bigcup_k \partial \mathcal{P}_\varphi^k$, notons $R_n(x)$ l'élément de la partition $\mathcal{P}_\varphi^n$ contenant x . et $\tilde{R}_n(x)$ l'élément de la partition $\tilde{\mathcal{P}}_\varphi^n$ contenant x .

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $u = (u_1, u_2)$ tels que x et $x + u$ appartiennent au même élément de la partition $\mathcal{P}_\varphi^n$.

On pose $M = \begin{pmatrix} \lambda_1(\varphi^1) & \lambda_2(\varphi^1) \\ \lambda_1(\varphi^2) & \lambda_2(\varphi^2) \end{pmatrix}$ et $u^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Puisque $|u| = O(\frac{1}{n})$ d'après le lemme 2.2 et (12), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε^1 ne dépendant que de φ et ε tel que :

$$(13) \quad |\varphi_n(x+u) - [\varphi_n(x) + nMu^t]| \leq \varepsilon, \text{ pour } n > n_\varepsilon.$$

Par conséquent, pour $n > N_\varepsilon^1$,

$$(14) \quad |\varphi_n(x+u) - nMu^t| \leq \varepsilon + |\varphi_n(x)|.$$

Rappelons que c et c' sont définies dans (12). La matrice M est inversible d'après l'hypothèse du théorème.

Pour $c_0 = \frac{1}{2}c$, l'image par M du carré $Q = [0, c_0] \times [0, c_0]$ est un parallélogramme $\mathcal{L}_0$ dont un sommet est à l'origine.

Supposons que $\mathcal{E}(\varphi) \neq \mathbb{R}^2$. D'après la forme des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^2$, il existe une boule ouverte U de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^2$, dont l'adhérence, le compact $K = \overline{U}$, est contenue dans $\mathcal{L}_0$ et est disjointe de $\mathcal{E}(\varphi)$.

Pour une constante $c_1 > 0$, on a $\lambda(U) \geq c_1\lambda(\mathcal{L}_0)$. Soit $U_0 \subset U$ la boule de rayon $r - 2\varepsilon$ de même centre que U . On choisit ε suffisamment petit pour que $\lambda(U_0) \geq \frac{1}{2}c_1\lambda(\mathcal{L}_0)$ et $\frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2 > 2\varepsilon$.

Pour conclure la démonstration du théorème par l'absurde il suffit de montrer que K contient une valeur essentielle de φ .

Supposons que, au contraire, $K \cap \mathcal{E}(\varphi) = \emptyset$. D'après le lemme 4.9, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(B) > 0$ et

$$(15) \quad \mu(B \cap T^{-n}B \cap (\varphi_n \in K)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Par le théorème de densité de Lebesgue appliqué à pour B , on obtient :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon^2 \geq 1$ et un ensemble de mesure positive $B_\varepsilon \subset B$ tels que :

$$(16) \quad \mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(u)) \geq (1 - 2\varepsilon)\mu(R_n(u)), \forall u \in B_\varepsilon \cap T^{-n}B_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon^2.$$

La récurrence de (φ_n) implique qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq N_\varepsilon^2$ tels que :

$$(17) \quad \mu(B_\varepsilon \cap T_\alpha^{-n}B_\varepsilon \cap (|\varphi_n| < \varepsilon)) > 0.$$

Par conséquent, on peut choisir $n \geq \sup(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$ et $x^0 \in \mathbb{T}^2$ tels que $|\varphi_n(x^0)| < \varepsilon$ et $x^0 \in B_\varepsilon \cap T^{-n}B_\varepsilon$, ce qui implique, d'après (16) :

$$(18) \quad \mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(x^0)) \geq (1 - 2\varepsilon)\mu(R_n(x^0)).$$

On peut supposer que x^0 , appartenant à $R_n(x^0)$, est l'un des sommets d'un carré $Q_n \subset R_n(x^0)$ de côté $\frac{c_0}{n} \times \frac{c_0}{n}$.

A un changement de signe près de u_1, u_2 , on peut également supposer que x^0 est le coin inférieur gauche.

D'après la définition de $\mathcal{L}_0$ donnée au début de la démonstration, $nM(Q_n - x^0) = \mathcal{L}_0$ et la mesure de l'ouvert $W = (nM)^{-1}U_0 + x^0$ vérifie $\mu(W) = \mu(Q_n) \frac{\lambda(U_0)}{\lambda(\mathcal{L}_0)} \geq \frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2\mu(R_n(x^0))$ (voir (12)).

Rappelons que ε est tel que $\frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2 - 2\varepsilon > 0$.

Il est clair que $W \subset Q_n \subset R_n(x^0)$. De plus, puisque $|\varphi_n(x^0)| < \varepsilon$, d'après (14), on a :

$$\begin{aligned} W = \{x : nM(x - x^0) \in U_0\} &\subset \{x : d(\varphi_n(x), U_0) \leq 2\varepsilon\} \\ &\subset \{x : \varphi_n(x) \in U\} \subset \{x : \varphi_n(x) \in K\}. \end{aligned}$$

Observons que pour trois ensembles E_1, E_2, E_3 ,

$$\mu(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \geq \mu(E_1 \cap E_2) - \mu(E_2) + \mu(E_2 \cap E_3).$$

En utilisant (18), il s'ensuit, avec $E_1 = B \cap T^{-n}B$, $E_2 = R_n(x^0)$, $E_3 = W$:

$$\begin{aligned} \mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(x^0) \cap \{x : \varphi_n(x) \in K\}) &\geq \mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(x^0) \cap W) \\ &\geq (1 - 2\varepsilon)\mu(R_n(x^0)) - \mu(R_n(x^0)) + \mu(R_n(x^0) \cap W) \\ &\geq (\frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2 - 2\varepsilon)\mu(R_n(x^0)) > 0. \end{aligned}$$

Ceci contredit (15) et conclut la démonstration de A).

B) Si (φ^1, φ^2) appartient à $\mathcal{F}_2$ et satisfait également l'hypothèse de B), alors φ^1 et φ^2 appartiennent à $\mathcal{G}$ (cf. Définition 1.5).

D'après le théorème 1.6, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tels que le cocycle (φ_n) ne soit pas récurrent a une dimension de Hausdorff $\leq 2 - 1/3$.

Soit B son complémentaire (c'est-à-dire l'ensemble des α tels que (Φ_n) soit récurrent). Etant donné les discontinuités β_j , l'ensemble A des α tel que la condition (8) de (H) soit satisfaite a une dimension de Hausdorff de 2 d'après le corollaire 3.3. Par conséquent, la dimension de Hausdorff¹ de $A \cap B$ est égale à 2.

D'après A), l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tels que le cocycle (φ_n) soit ergodique a une dimension de Hausdorff de 2. $\square$

¹Pour les ensembles A et B , on a : $2 = \dim_H A \leq \max(\dim_H(A \cap B), \dim_H(A \cap B^c)) \leq \max(\dim_H(A \cap B), \dim_H(B^c)) \leq \max(\dim_H(A \cap B), 2 - 1/3)$; Par conséquent, $\dim_H(A \cap B) = 2$.

5. Références

REFERENCES

- [Atkinson1976] G. Atkinson: Recurrence of co-cycles and random walks, J. London Math. Soc. (2) 13 (1976), no. 3, 486-488.
- [4] V. I. Bernik, M. M. Dodson: *Metric Diophantine approximation on manifolds*, Cambridge Tracts in Mathematics 137, Cambridge University Press 1999
- [Cheung 2011] Y. Cheung: Hausdorff dimension of the set of singular pairs, Annals of Math. (2) 173 (2011), no. 1, 127-167.
- [Chevallier-Conze 2009] N. Chevallier, J.-P. Conze: Examples of recurrent or transient stationary walks in $\mathbb{R}^d$ over a rotation of $\mathbb{T}^2$, Contemporary Mathematics, vol. 485 AMS, Providence, RI, 2009, p. 71-84.
- [Chevallier-Conze 2026] N. Chevallier and J.-P. Conze: Ergodicity of cocycles over 2-dimensional rotations, Studia Mathematica (2026)
- [Conze 2009] J.-P. Conze: Recurrence, ergodicity and invariant measures for cocycles over a rotation, Contemporary Mathematics, vol. 485, AMS, Providence, RI, 2009, p. 45-70.
- [Einsiedler-Tseng 2011] M. Einsiedler, J. Tseng: Badly approximable systems of affine forms, fractals, and Schmidt games, J. Reine Angew. Math. 660 (2011), 83-97.
- [Falconer 1997] K. Falconer: *Fractal geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley 1997.
- [Niederreiter 1972] H. Niederreiter: On a number-theoretical integration method, Aequa. Math., 8 (1972), 304-311.
- [Ostrowski 1922] A. Ostrowski: Zu meiner Note: "Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen" im 1. Heft dieses Bandes Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1 (1922), no. 1, 249-250.
- [K. Schmidt 1977] K. Schmidt: *Cocycle of Ergodic Transformation Groups*, Lect. Notes in Math (Vol. 1) Mac Milan Co. of India, 1977.
- [W. M. Schmidt 1966] W. M. Schmidt: On badly approximable numbers and certain games, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966) 178-199.
- [W. M. Schmidt 1970] W. M. Schmidt: Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, Acta Math. 125 (1970), 189-201.
- [W. M. Schmidt 1976] W. M. Schmidt: Two questions in Diophantine approximation, Monatsh. Math. 82 (1976), no.3, 237-245.
- [Tseng 2009] J. Tseng: Badly approximable affine forms and Schmidt games, J. Number Theory 129 (2009), p. 3020-3025.
- [Yoccoz 1980] J.-C. Yoccoz: Sur la disparition de propriétés de type Denjoy-Koksma en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 291 (1980), no. 13.