

G -Extensions de systèmes dynamiques en mesure infinie

I

Régularité des cocycles,
mesures invariantes
et décomposition ergodique

Jean-Pierre Conze
(Université de Rennes)

St Jacut
22-25 juin 2026

Plan de l'exposé 1

1 Introduction

2 Cocycles réguliers et non réguliers

- Groupe des périodes et valeurs essentielles
- Cohomologie et valeurs essentielles, régularité

3 Mesures invariantes pour les G -extension d'un système dynamique

- Construction de mesures invariantes
- Forme des mesures invariantes ergodiques
- Décomposition ergodique de $\mu \otimes m_G$

4 Références

Introduction

La série de trois exposés de ce mini-cours est consacrée aux G -extensions de systèmes dynamiques en mesure infinie, c'est-à-dire aux produits croisés (appelés également produits gauches ou systèmes cylindriques) définies comme suit:

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique, où

- X est un espace muni d'une σ -algèbre $\mathcal{B}$ et d'une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$,
- $T : X \mapsto X$ est une application de X dans X que nous supposons inversible, mesurable, ainsi que son inverse, préservant la mesure μ .

Nous supposons également que le système de base $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique.

Soit G un groupe localement compact que nous supposons (sauf exception) abélien et non compact, muni d'une mesure de Haar $m_G(dg)$. Pour simplifier, on pourra prendre $G = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$.

Soit φ une application mesurable de X dans G . L'extension de T par φ est la transformation T_φ est définie sur $X \times G$ par

$$(x, g) \mapsto (Tx, g + \varphi(x)),$$

Elle laisse invariante la mesure infinie $\tilde{\mu} = \mu \times m_G$ et définit un système dynamique en mesure infinie sur $X \times G$.

Notations : La somme ergodique d'ordre $n \geq 1$ d'une fonction f sur X sous l'action de T , notée $S_n f$ ou simplement f_n , est $S_n f(x) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)$.

Les itérées de la transformation T_φ s'écrivent donc

$$T_\varphi^n(x, g) = (T^n x, g + \varphi_n(x)).$$

Une motivation dans l'étude des G -extensions provient du modèle du billard défini par le mouvement d'une bille dans le plan muni d'obstacles $\mathbb{Z}^2$ -périodiques.

Le réseau $\mathbb{Z}^2$ partage le plan en cellules unités indexées par $\mathbb{Z}^2$.

La transformation billard est une transformation de l'espace des configurations, une configuration étant identifiée au couple $(q, \vec{v})$ d'un point q du bord d'un obstacle et d'un vecteur unité $\vec{v}$ dirigé vers l'extérieur de l'obstacle auquel appartient q .

Elle commute avec la translation par $\mathbb{Z}^2$ opérant sur l'espace des configurations.

En prenant le quotient par $\mathbb{Z}^2$, on obtient une transformation T préservant la mesure de Liouville en mesure finie.

La transformation billard dans le plan peut être modélisée comme un produit gauche $(T(q, \vec{v}), g + \varphi(q, \vec{v}))$ au dessus de ce quotient, où $\varphi(q, \vec{v})$ est le vecteur de déplacement d'une cellule à la cellule suivante entre deux collisions au cours du mouvement.

Dans le cas d'obstacles polygonaux, on obtient une extension au-dessus d'un échange d'intervalles. Dans le cas d'obstacles convexes on obtient le billard dispersif de Sinai dispersif, qui est un modèle de type hyperbolique.

Nous n'étudierons pas le billard, mais des produits gauches au dessus de transformations de nature algébrique plus simples: rotations, d'une part, et automorphismes hyperboliques, d'autre part.

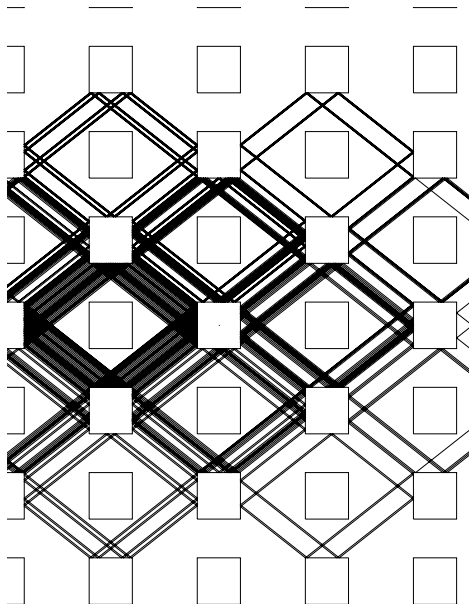


Figure: Une orbite dans un billard rectangulaire

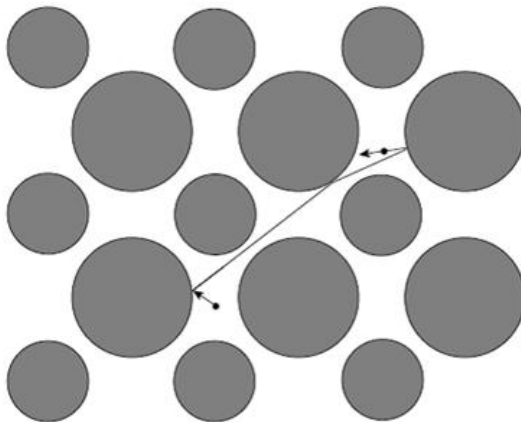


Figure: Le billard dispersif (d'après Pène-Saussol)

La suite (φ_n) est appelée “cocycle”. Elle vérifie la relation de cocycle:

$$\varphi_{n_1+n_2}(x) = \varphi_{n_1}(x) + \varphi_{n_2}(T^{n_1}x), \quad \forall n_1, n_2 \geq 0.$$

L'étude des G -extensions est essentiellement l'étude du comportement asymptotique des cocycles.

- Le premier exposé rappellera les notions générales associées à l'étude des cocycles, notamment celles périodes et de valeurs essentielles.

Nous introduirons la propriétés de régularité pour un cocycle et verrons comment la non régularité est une forme forte de non ergodicité, en particulier à travers l'expression de la décomposition ergodique de la mesure invariante produit $\tilde{\mu} = \mu \times m_G$ dans le cas non régulier.

- Le deuxième exposé portera sur des exemples d'extensions d'une rotation 1-d: un exemple simple de cocycle ergodique et un exemple simple de cocycle non régulier seront présentés. Nous montrerons également, à l'aide la méthode du “zig-zag” la régularité d'une classe de cocycles au-dessus de transformations de type hyperbolique
- Dans le troisième exposé, nous abordera la question de la récurrence d'un cocycle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ et donnerons des exemples de cocycles au-dessus de rotation 2-d, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d > 1$ qui sont récurrents et ergodiques.

Les démonstrations seront soit données à la suite des énoncés, soit données en annexe, soit admises.

Rappelons les données et les notations.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé **ergodique**. Pour simplifier, nous supposons T inversible.

Soient $\varphi : X \rightarrow G = \mathbb{R}^d$ mesurable et $(X \times G, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, T_\varphi)$ l'extension de $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ par φ , que nous supposons récurrente: $T_\varphi : (x, u) \mapsto (Tx, u + \varphi(x))$, avec la mesure produit $\tilde{\mu} = \mu \times m_G$ pour mesure invariante.

Pour une fonction f sur X , rappelons la notation des sommes ergodiques de f pour l'action de T ou de T_φ :

$$S_n f(x) = \begin{cases} f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x), & \text{si } n > 0, \\ 0, & \text{si } n = 0, \\ -(f(T^n x) + f(T^{n+1}x) + \dots + f(T^{-1}x)), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Nous noterons aussi f_n les sommes ergodiques $S_n f$ de f . En particulier $\varphi_n = S_n \varphi$.

Le cocycle (noté (φ_n) ou (T, φ)) engendré au-dessus du système (X, μ, T) par la fonction φ est la suite (φ_n) des sommes ergodiques de φ .

La distribution du cocycle (φ_n) dépend implicitement de la mesure T -invariante μ .

Les questions de base concernant le cocycle (T, φ) et l'extension T_φ sont

- la récurrence de (φ_n) : est-ce que pour tout voisinage V de l'origine, $\varphi_n(x) \in V$ pour une infinité de temps $n_j(x)$?
- l'ergodicité du système $(X \times G, \tilde{m}, T_\varphi)$. Si l'extension est ergodique, on dit que le cocycle (φ_n) est ergodique.

Pour la récurrence, disons tout de suite que si $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable telle que $\int_X \varphi d\mu = 0$, le cocycle est récurrent. Nous reviendrons dans la troisième partie du cours sur la question de la récurrence en dimension $d \geq 1$.

Valeurs essentielles d'un cocycle (T, φ)

L'ergodicité des extensions est liée aux valeurs essentielles du cocycle associé (cf. [K. Schmidt 1977], [Feldman-Moore 1977]).

Notation

Notons $\mathcal{P}(T, \varphi)$ l'ensemble des $\gamma \in \mathbb{R}^d$ tels que, pour toute fonction f mesurable sur $X \times \mathbb{R}^d$ invariante par T_φ , $f(x, u + \gamma) = f(x, u)$, pour $\mu \times \lambda$ -p.t. $(x, u) \in X \times \mathbb{R}^d$.

Pour caractériser l'ergodicité de l'extension nous allons définir l'ensemble des valeurs essentielles du cocycle (T, φ) (finies ou infinie) et montrer que sa restriction à $\mathbb{R}^d$ coïncide avec $\mathcal{P}(\varphi)$.

Définition (2.1)

Un élément $a \in \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ est une valeur essentielle du cocycle (T, φ) (pour la mesure μ) si, pour tout voisinage V de a , pour tout sous-ensemble mesurable B de mesure $\mu(B) > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap (\varphi_n \in V)) > 0.$$

Les voisinages de ∞ dans $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ sont les complémentaires des compacts.

On note $\tilde{\mathcal{E}}(T, \varphi)$ l'ensemble des valeurs essentielles du cocycle (T, φ) et $\mathcal{E}(T, \varphi)$ ou simplement $\mathcal{E}(\varphi)$ l'ensemble $\tilde{\mathcal{E}}(T, \varphi) \cap \mathbb{R}^d$ des valeurs essentielles finies.

Si $a \notin \tilde{\mathcal{E}}(\varphi)$, il existe sous-ensemble mesurable B et un voisinage V de a tel que pour tout $n \geq 1$, $\mu(B \cap T^{-n}B \cap (\varphi_n \in V)) = 0$.

Egalité des groupes $\mathcal{P}(T, \varphi)$ et $\mathcal{E}(T, \varphi)$

On montre facilement le lemme:

Lemme (2.2)

$\mathcal{P}(T, \varphi)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^d$. $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi)$ est fermé dans $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$.

Pour montrer l'égalité des groupes $\mathcal{P}(T, \varphi)$ et $\mathcal{E}(T, \varphi)$, nous utiliserons le lemme suivant :

Soit (U, ρ) un espace métrique complet et séparable muni d'une action continue $(\gamma, u) \rightarrow \gamma.u$ de $\mathbb{R}^d$ sur cet espace. Soit f une application mesurable de X dans U .

Lemme (2.3)

Si f vérifie la condition d'invariance $f(Tx) = \varphi(x).f(x)$, μ -p.p., alors $a.f(x) = f(x)$, μ -p.p., $\forall a \in \mathcal{E}(\varphi)$.

Preuve du lemme 2.3. Notons $f^*\mu$ la mesure image définie par $f^*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ pour A borélien de U et $B(u, r)$ la boule ouverte de centre u et de rayon r dans U .

Prenons une suite dense D dans l'espace métrique séparable (U, ρ) . L'ensemble

$$\Delta := \bigcup_{u \in D, \ell \geq 1: f^*\mu(B(u, \frac{1}{\ell})) = 0} B(u, \frac{1}{\ell})$$

est de mesure nulle pour la mesure $f^*\mu$.

Soit x tel que $\mu(\{y \in X : \rho(f(y), f(x)) < \frac{1}{m}\}) = 0$, pour un entier $m \geq 1$. Si $u \in D$ est tel que $\rho(u, f(x)) < \frac{1}{2m}$, l'inclusion $B(u, \frac{1}{2m}) \subset B(f(x), \frac{1}{m})$ entraîne:
 $f^* \mu(B(u, \frac{1}{2m})) = 0$ et donc $f(x) \in \Delta$ puisque $f(x) \in B(u, \frac{1}{2m})$.

Il en résulte que l'ensemble

$$X_f := \{x \in X : \mu(\{y \in X : \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon\}) > 0, \text{ pour tout } \varepsilon > 0\}$$

est de μ -mesure pleine.

Soient $x \in X_f$, $a \in \mathcal{E}(\varphi)$ et $\varepsilon > 0$ arbitraire. Le sous-ensemble $E_x = \{y : \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon\}$ est de μ -mesure > 0 . Puisque $a \in \mathcal{E}(\varphi)$, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $x_1 \in E_x$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $T^n x_1 \in E_x$ et $d(a, \varphi_n(x_1)) < \varepsilon_1$, où d est une distance sur $\mathbb{R}^d$.

Par invariance de f , on a :

$$\rho(a.f(x), f(x)) \leq \rho(af(x), af(x_1)) + \rho(af(x_1), \varphi_n(x_1).f(x_1)) + \rho(f(T^n x_1), f(x)).$$

Par la continuité de l'action sur U , les deux premiers termes peuvent être rendus arbitrairement petits (par le choix de x_1 et n) en prenant $\varepsilon, \varepsilon_1$ petits, de même que le troisième terme compte-tenu de $T^n x_1 \in E_x$. On obtient donc: $\rho(af(x), f(x)) = 0$.



Proposition (2.4)

$$\mathcal{E}(T, \varphi) = \mathcal{P}(T, \varphi)$$

Preuve 1) Montrons que toute période a de (T, φ) est une valeur essentielle.

Soit U un voisinage de l'élément neutre. Considérons l'ensemble invariant par T_φ

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_\varphi^n(A \times U).$$

Si a est une période de (T, φ) , on a : $1_B(x, u + a) = 1_B(x, u)$ et donc, pour presque tout $(x, u) \in A \times U$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x, u + a) \in T_\varphi^{-n}(A \times U)$.

Ceci entraîne $T^n x \in A$ et pour un $v \in U$, $u + a + \varphi_n(x) = v$, d'où $a + \varphi_n(x) = v - u \in U - U$.

Il en résulte que $-a$, et donc a , est une valeur essentielle.

2) Par ailleurs nous allons montrer que " a valeur essentielle finie" $\Rightarrow$ " $-a$ période de toute fonction mesurable T_φ -invariant".

Soit h une fonction continue > 0 sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\int h(y) dy = 1$. Nous appliquons le lemme 2.3 à l'espace U des fonctions réelles mesurables sur $\mathbb{R}^d$, muni de la métrique définie par $\rho(f_1, f_2) = \int_X \inf(|f_1 - f_2|, 1) h dy$. Le groupe $G = \mathbb{R}^d$ opère sur U par $(\gamma.f)(u) = f(u + \gamma)$.

Une fonction F mesurable sur $X \times \mathbb{R}^d$ peut être vue comme une fonction $\tilde{F}$ sur X prenant ses valeurs dans U : $\tilde{F}(x) : x \mapsto F(x, u)$. Si F sur $X \times \mathbb{R}^d$ est T_φ -invariante, alors on a la condition d'invariance $\varphi(x). \tilde{F}(Tx) = \tilde{F}(x)$, μ -presque partout.

Il en résulte, d'après le lemme 2.3, que $a.\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x)$ pour $a \in \mathcal{E}(\varphi)$ et donc a est une période de $\tilde{F}$.

La proposition montre que $\mathcal{E}(\varphi) = \mathbb{R}^d$ si et seulement si T_φ est ergodique. En effet, si $G = \mathcal{E}(T, \varphi) = \mathcal{P}(T, \varphi)$, alors les fonctions T_φ -invariantes ne dépendent que de la première coordonnée, donc sont constantes par ergodicité de T sur la base. Inversement, si T_φ est ergodique, elles sont constantes, donc admettent G comme groupe de périodes.

Le groupe des valeurs essentielles finies étant fermé dans $\mathbb{R}^d$, pour prouver l'ergodicité d'une extension, une méthode est de mettre en évidence un ensemble dense de valeurs essentielles.

Définition (2.5)

On dit que φ est un **cobord mesurable** (ou simplement un cobord), s'il existe une fonction mesurable $\eta : X \mapsto \mathbb{R}^d$ telle que $\varphi = \eta - \eta \circ T$.

Deux fonctions φ et φ' définies sur $(X, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sont dites **cohomologues** si $\varphi - \varphi'$ est un cobord mesurable.

Si φ et φ' sont cohomologues, $\varphi - \varphi' = \eta - \eta \circ T$, alors les extensions par φ et φ' sont conjuguées, la conjugaison étant $(x, u) \mapsto (x, u + \eta(x))$.

En particulier, si $\varphi = \eta - \eta \circ T$, l'extension $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, T_\varphi)$ est conjuguée à l'extension triviale par la fonction identiquement nulle. Dans ce cas les fonctions de la forme $g(u + \eta(x))$ sont T_φ -invariantes et l'extension n'est pas ergodique.

Si $\varphi - \varphi' = \eta - \eta \circ T$, alors la fonction $f(x, u)$ est invariante par $\tilde{T}_\varphi$, si et seulement si $f'(x, u) := f(x, u + \eta(x))$ est $\tilde{T}_{\varphi'}$ -invariante. Il en résulte que $\mathcal{P}(\varphi) = \mathcal{P}(\varphi')$ et donc que (φ_n) et (φ'_n) ont les mêmes valeurs essentielles finies.

Cocycle induit: Soit B un ensemble mesurable de mesure μ positive dans X . Soient T_B la transformation induite sur B et $\varphi^B(x) := \sum_{j=0}^{R_B(x)-1} \varphi(T^j x)$, où R_B est le temps de retour dans B . Le cocycle "induit" est défini, pour $n \geq 1$, par

$$\varphi_n^B(x) := \varphi^B(x) + \varphi^B(T_B x) + \cdots + \varphi^B(T_B^{n-1} x).$$

Proposition (2.6)

Si φ et φ' sont deux fonctions telles que $\varphi = \varphi' + \eta - \eta \circ T$, μ -p.p., avec η mesurable, on a $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) = \tilde{\mathcal{E}}(\varphi')$. En particulier, si φ est un cobord, alors $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) = \{0\}$.

Preuve Soit B mesurable de mesure > 0 . Considérons l'induit η^B de η sur B . Par le théorème de Lusin, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble C_ε de mesure > 0 de B tel que $|\eta(x) - \eta(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in C_\varepsilon$. Si $a \in \tilde{\mathcal{E}}(\varphi)$, pour tout voisinage V de a , il existe $n \geq 1$ tel que $\mu_B(\varphi_n^{C_\varepsilon} \in V) > 0$.

Comme $|\varphi_n^{C_\varepsilon}(x) - (\varphi'_n)^{C_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$ sur C_ε , ceci implique que a appartient à $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi')$. De même tout a dans $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi')$ est dans $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi)$. □

Lemme (2.7)

Tout cocycle (T, φ) avec $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}^d$ tel que $(\varphi_n(x), n \geq 0)$ soit borné pour presque tout x est un cobord: $\varphi = \zeta - \zeta \circ T$, où ζ est mesurable et presque partout finie.

Preuve Posons $\zeta^j(x) = \limsup_n [\varphi^j(x) + \varphi^j(Tx) + \cdots + \varphi^j(T^n x)]$. La fonction $\zeta := (\zeta^j, j = 1, \dots, d)$ est mesurable, presque partout finie et le couple (φ, ζ) vérifie la relation de cobord $\varphi + \zeta \circ T = \zeta$. □

Proposition (2.8)

On a $\tilde{\mathcal{E}}(\varphi) = \{0\}$ si et seulement si φ est un cobord.

Preuve Il reste à montrer que si $\infty \notin \tilde{\mathcal{E}}(\varphi)$ alors φ est un cobord.

Si $\infty \notin \tilde{\mathcal{E}}(\varphi)$, il existe B avec $\mu(B) > 0$ et un voisinage de l'infini (autrement dit le complémentaire d'un compact) dans lequel $\varphi_n^B(x)$ n'entre pas pour $|n|$ grand, pour presque tout x . Par le lemme 2.7, ceci implique que φ^B est un cobord: il existe ζ mesurable telle que $\varphi^B = \zeta^B \circ T_B - \zeta^B$.

Par ergodicité de (X, μ, T) , pour μ -p.t. $y \in X$, il existe $x \in B$ et un entier k , $0 \leq k < R_B(x)$, tels que $y = T^k x$.

On définit ζ sur X en prenant, pour $y = T^k x$, $0 \leq k < R_B(x)$, $\zeta(y) = \varphi_k(x) + \zeta^B(x)$.

Pour $0 \leq k < R_B(x) - 1$, la relation de cocycle est satisfaite par construction. Pour $k = R_B(x) - 1$, elle résulte de la relation de cobord pour le cocycle induit. $\square$

Prenons l'exemple d'un cocycle (φ_n) récurrent à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ce cocycle peut être également vu comme un cocycle récurrent à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Il peut être ergodique en tant que cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}$, mais il ne l'est pas comme cocycle à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les fonctions de la forme $F(x, y) = f(y)$ où f est 1-périodique sont en effet invariantes par la transformation T_φ .

Plus généralement, si φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais cohomologue à une fonction ψ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\varphi = \psi + \zeta - \zeta \circ T$, (φ_n) n'est pas un cocycle ergodique à valeurs dans $\mathbb{R}$, puisque les fonctions de la forme $F(x, y) = f(y + \zeta(x))$ où f est 1-périodique sont dans ce cas invariantes par la transformation T_φ . En un sens il peut y avoir ergodicité, mais après réduction par cohomologie à un sous-groupe H plus petit.

L'obstruction à l'ergodicité dans la situation précédente est simple et la tribu des invariants peut être décrite simplement. Ceci conduit à introduire la notion suivante:

Définition (2.9 Régularité d'un cocycle)

Un cocycle (φ_n) récurrent à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit régulier si φ est cohomologue à ψ à valeurs dans un sous-groupe fermé H de $\mathbb{R}^d$ tel que (ψ_n) soit ergodique sur $X \times H$.

Plus explicitement, pour un cocycle régulier il existe un sous-groupe fermé H de $\mathbb{R}^d$ et ψ et ζ mesurables tels que

$$\varphi = \psi + \zeta - \zeta \circ T, \text{ avec } \psi : X \rightarrow H, \quad (1)$$

et $T_\psi : (x, h) \rightarrow (Tx, h + \psi(x))$ est ergodique sur $X \times H$.

On note que nécessairement $H = \mathcal{E}(\varphi)$. En effet, φ et ψ étant cohomologues, on a $\mathcal{E}(\varphi) = \mathcal{E}(\psi)$ et, comme (ψ_n) est ergodique sur $X \times H$, $\mathcal{E}(\psi) = H$.

Si (φ_n) est ergodique, alors il est régulier, avec $H = \mathbb{R}^d$ et ζ est la fonction identiquement nulle. Dans le cas général d'un cocycle (φ_n) régulier, d'après (1), on montre à l'aide du théorème de Fubini, que si $F(x, y)$ est T_φ -invariante mesurable sur $X \times \mathbb{R}^d$, la fonction $G_a : (x, h) \rightarrow G_a(x, h) = F(x, a + h - \zeta(x))$ définit, pour presque tout $a \in \mathbb{R}^d$, une fonction mesurable T_ψ -invariante sur $X \times H$, donc constante $\mu \times \lambda_H$ -p.p.

On en déduit que F est de la forme $F(x, y) = f(y + \zeta(x))$, où f est invariante par translation par les éléments de H .

La fonction $\underline{\varphi}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d / \mathcal{E}(\varphi)$ définie par $x \rightarrow \varphi(x) \bmod \mathcal{E}(\varphi)$ sur X a un groupe de périodes $\mathcal{P}(\underline{\varphi})$ trivial. Le groupe $\mathcal{E}(\underline{\varphi})$ est donc trivial.

Cohomologie et valeurs essentielles, régularité

On a donc l'alternative suivante pour l'ensemble des valeurs essentielles de $\underline{\varphi}$:

- soit il est réduit à $\{0\}$; $\varphi \bmod \mathcal{E}(\varphi)$ est alors un cobord, φ est cohomologue à un cocycle ergodique à valeurs dans $\mathcal{E}(\varphi)$ et (T, φ) est régulier,
- soit il est égal à $\{0, \infty\}$ et le cocycle $(T, \varphi \bmod \mathcal{E}(\varphi))$, de même que (T, φ) , n'est pas régulier.

Si φ est régulier avec $\varphi = \psi + \eta - \eta \circ T$ avec ψ à valeurs dans un sous-groupe fermé H et T_ψ ergodique sur $X \times H$. Les mesures invariantes ergodiques de la décomposition ergodique de $\mu \times dg$ sont les mesures $\tilde{\mu}_v$ paramétrées par $v \in G \bmod H$ définies par:

$$\int f(x, u) d\tilde{\mu}_v = \int_X \int_H f(x, v + u + \eta(x)) d\mu(x) dm_H(u).$$

Comme ψ est à valeurs dans H , l'invariance de l'intégrale résulte de

$$\begin{aligned} & \int_X \int_H f(Tx, v + u + \varphi(x) + \eta(x)) d\mu(x) dm_H(u) \\ &= \int_X \int_H f(Tx, v + u + \psi(x) + \eta(Tx)) d\mu(x) dm_H(u) \\ &= \int_X \left(\int_H f(Tx, v + u + \eta(Tx)) dm_H(u) \right) d\mu(x) = \int_X \left(\int_H f(x, v + u + \eta(x)) d\mu(x) dm_H(u) \right). \end{aligned}$$

Nous verrons dans la suite que, pour un cocycle non régulier, la décomposition de $\mu \otimes m$ en mesures ergodiques pour T_φ est basée sur une famille de mesures μ_x ($x \in X$) définies sur X . Ces mesures μ_x sont infinies, singulières par rapport à la mesure μ , et il en existe une infinité non dénombrable deux à deux singulières.

Il faut voir la non régularité d'un cocycle comme une forme forte de non ergodicité de l'extension associée.

Mesures invariantes pour une G -extension

Soient $(X, \mathcal{B})$ un espace borélien standard et T une transformation inversible mesurable ainsi que son inverse. Si G est un groupe, à une application mesurable $\varphi : X \mapsto G$ nous associons la G -extension

$$T_\varphi : (x, g) \in X \times G \mapsto (Tx, g\varphi(x)). \quad (2)$$

Pour cette discussion sur les mesures invariantes, nous nous placerons dans le cas d'un groupe topologique G localement compact à base dénombrable, non nécessairement abélien (avec notation multiplicative).

Nous cherchons la forme générale des mesures σ -finies invariantes ergodiques pour une G -extension. Nous verrons que ce sont des mesures de Maharam, associées à une mesure quasi-invariante sur la base.

Ceci ne préjuge pas de la question de l'ergodicité des mesures de Maharam, en particulier de la mesure produit. L'ergodicité est un autre problème.

On peut munir G d'une distance d définissant sa topologie. On supposera que, pour un voisinage relativement compact V de l'élément neutre de G , on a $G = \bigcup_{n \geq 1} V^n$. On supposera également que les boules fermés de rayon fini sont compactes.

Nous notons m_G une mesure de Haar à droite sur les boréliens de G ,

De façon générale, étant donné un espace mesuré et une transformation mesurable sur cet espace, il existe beaucoup de mesures σ -finies invariantes ergodiques pour cette transformation (cf. [K. Schmidt 1979]).

Si l'on cherche à expliciter les mesures invariantes et ergodiques par T_φ dans un cas non compact, on est donc conduit à imposer des restrictions. Nous considérerons ici des mesures λ satisfaisant la condition suivante:

Condition (P): Nous dirons qu'une mesure λ positive σ -finie sur $(X \times G, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(G))$ satisfait la condition (P) si $\lambda(dx, dg) = \mu(dx)N(x, dg)$ (notation $\mu \otimes N$), où :

- i) μ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$;
- ii) N est un noyau de Radon positif de $(X, \mathcal{B})$ dans $(G, \mathcal{B}(G))$

On a donc : pour tout $x \in X$, $N(x, \cdot)$ est une mesure de Radon positive sur les boréliens de G (que l'on peut supposer non identiquement nulle) et pour tout borélien B de G , l'application $x \in X \rightarrow N(x, B) \in [0, +\infty]$ est mesurable.

Pour λ donnée, le couple (μ, N) n'est pas défini de façon unique. Si h est une fonction mesurable strictement positive sur X telle que $\int_X h(x) \mu(dx) = 1$, on peut remplacer (μ, N) par le couple $(h\mu, h^{-1}N)$.

Nous présentons maintenant un procédé de construction de mesures invariantes pour une G -extension associées à une mesure quasi-invariante sur la base.

Soit χ une exponentielle sur G , c'est-à-dire une application continue de G dans $]0, +\infty[$ telle que $\forall g, g' \in G, \chi(g g') = \chi(g) \chi(g')$. Si μ_χ est une mesure σ -finie $\chi \circ \varphi$ -conforme sur X , c'est-à-dire telle que :

$$T\mu_\chi = \chi \circ \varphi \circ T^{-1} \mu_\chi, \quad (3)$$

alors la mesure ("mesure de Maharam" d'après Dorothy Maharam)

$$\lambda_\chi(dx, dg) := \mu_\chi(dx) \otimes \chi(g)m_G(dg) \quad (4)$$

est une mesure σ -finie sur $X \times G$ qui est T_φ -invariante.

Le théorème 3.1 ci-dessous met en évidence le rôle des mesures quasi-invariantes satisfaisant (3) (mesures conformes) dans l'étude des mesure T_φ -invariantes. Nous rappelons d'abord un résultat d'existence de telles mesures dans le cadre d'un espace métrique compact X et d'une application borélienne $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$.

Soit ζ une fonction continue à valeurs réelles > 0 sur X . Une condition suffisante pour l'existence d'une mesure de probabilité quasi-invariante ν telle que $T\nu = \zeta\nu$ est $\inf_{\mu \in E(T)} \left| \int \log \zeta d\mu \right| = 0$, où $E(T)$ est l'ensemble de toutes les mesures de probabilité ergodiques T -invariantes. Pour une rotation ergodique, cette condition se réduit à $\int_X \log \zeta dx = 0$.

Remarquons qu'il peut exister des mesures atomiques portées par l'orbite de points $x \in X$ tels que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k(x) < \infty$, où ζ_k est le cocycle multiplicatif défini par ζ .

Sur le cercle, si T est une rotation ergodique sur le cercle et si $\log \zeta$ est à variation bornée, ce cas dégénéré ne se produit pas : l'inégalité de Denjoy-Koksma implique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_k(x) = \infty, \forall x \in X$. De plus, la mesure ν satisfaisant l'équation de quasi-invariance pour un ζ donné est unique et sa classe est T -ergodique (cf. [Conze-Guivarc'h 2000]).

En conséquence, si φ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ à variation bornée et d'intégrale nulle, pour toute rotation ergodique T sur le cercle, pour toute exponentielle χ sur $\mathbb{R}$, il existe une unique mesure de probabilité μ_χ non atomique et $\chi \circ \varphi$ -conforme, i.e., telle que $T\mu_\chi = \chi \circ T^{-1}\varphi, \mu_\chi$.

De façon générale, l'étude des mesures invariantes pour une G -extension définie par (2) conduit à deux problèmes:

- Quelle est la forme de ces mesures ?
- Sur des exemples, obtenir des critères d'ergodicité pour les mesures de la forme (4).

Les mesures ergodiques localement finies invariantes par T_φ ont été décrites pour certaines extensions (en particulier dans des travaux de O. Sarig).

Un théorème d'Albert Raugi répond à la première question: dans le cas général, ces mesures ergodiques proviennent de mesures conformes sur la base.

Forme des mesures invariantes ergodiques pour une G -extension T_φ

Dans ce qui suit, φ est une application mesurable de X dans G et $\lambda = \mu \otimes N$ est une mesure positive non réduite à 0, σ -finie sur $X \times G$ et satisfaisant la condition (P).

L'espace des fonctions positives ou nulles continues à support compact sur G est noté $C_K^+(G)$. L'espace des fonctions bornées positives ou nulles, uniformément continues en g et à support dans $X \times C$ pour un compact C de G est noté $C_{X,K}^+(G)$.

Le support topologique d'une mesure de Radon σ sur G est noté $\text{Supp}(\sigma)$.

La convolée $\sigma * \delta_a$ de la mesure σ par la mesure de Dirac au point $a \in G$ est donnée, pour f continue à support compact sur G , par $\int_G f(\sigma * \delta_a)(dg) = \int_G f(ga^{-1})\sigma(dg)$.

Théorème (3.1 [Albert Raugi 2007])

Supposons la mesure λ invariante et ergodique pour T_φ . Il existe alors

1) un sous-groupe fermé H de G tel que

$$\text{Supp}(N(x, \cdot))(\text{Supp}(N(x, \cdot)))^{-1} \subset H, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in X;$$

2) une application mesurable $u : X \mapsto G$ et une exponentielle χ sur H telles que

a) pour μ -p.t. $x \in X$, $\varphi_u(x) := u(x)\varphi(x)(u(Tx))^{-1} \in H$;

b) la mesure $\theta_u\lambda$ sur $X \times H$ image de λ par $\theta_u : (x, g) \mapsto (x, g(u(x))^{-1})$ satisfait la condition (P) et est T_{φ_u} -invariante ergodique pour l'extension T_{φ_u} sur $X \times H$;

c) $\forall f \in C_{X,K}^+(G)$, $\int_{X \times G} f(x, g)\lambda(dx, dg) = \int_X (\int_H f(x, h)\chi(h)m_H(dh) * \delta_{u(x)})\tilde{\mu}(dx)$, où $\tilde{\mu}$ est une mesure positive σ -finie sur X équivalente à μ , vérifiant

$$T\tilde{\mu} = \chi \circ T^{-1}\varphi_u \tilde{\mu}.$$

Décomposition ergodique de $\mu \otimes m_G$

Rappelons les données: μ est une mesure σ -finie T -invariante ergodique sur X , φ est une application mesurable de X dans un groupe G lcsc et λ est la mesure produit T_φ -invariante $\lambda = \mu \otimes m_G$. On supposera T inversible et bimesurable. Pour simplifier, nous supposerons G abélien, mais avec la notation multiplicative.

A partir de la forme des mesures ergodiques donnée par le théorème 3.1, il est possible de préciser la structure de la décomposition ergodique de la mesure λ pour la transformation T_φ . Nous présentons ci-dessous le résultat (cf. [Conze-Raugi 2009]).

Probabilité conditionnelle régulière

Soient $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une sous- σ -algèbre de $\mathcal{F}$. Rappelons qu'une *probabilité conditionnelle régulière* relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathbb{P}$ est une application P de $E \times \mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que

- i) pour tout $x \in E$, $P(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$,
- ii) pour tout $A \in \mathcal{F}$, l'application $x \in E \longrightarrow P(x, A)$ est une version de l'espérance conditionnelle de 1_A par rapport à la σ -algèbre $\mathcal{B}$.

Elle est donc $\mathcal{B}$ -mesurable et vérifie, pour toute fonction $\mathcal{B}$ -mesurable u :

$$\int_E 1_A(x) u(x) \mathbb{P}(dx) = \int_E P(x, A) u(x) \mathbb{P}(dx).$$

Pour toute fonction f positive ou nulle ou bornée $\mathcal{F}$ -mesurable, Pf définie par $Pf(x) := \int_E f(y) P(x, dy)$ est une version de l'espérance conditionnelle de f par rapport à $\mathcal{B}$.

L'existence d'une probabilité conditionnelle régulière peut être montrée sous des conditions assez générales sur $(E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Comme μ est σ -finie sur X et G est un groupe lcsc, nous pouvons construire une fonction r partout > 0 mesurable sur $X \times G$ telle que

$$\int_{X \times G} r(x, g) \mu(dx) m_G(dg) = 1.$$

Appliquée à $(X \times G, \mathcal{B} \times \mathcal{B}(G))$, à la probabilité $r\lambda$ sur $X \times G$ et à la sous- σ -algèbre $\mathcal{J}$ des ensembles invariants par T_φ , l'existence d'une probabilité conditionnelle régulière fournit une probabilité conditionnelle régulière par rapport à $r\lambda$ et à $\mathcal{J}$.

On la note P_r . C'est donc une probabilité de transition sur $X \times G$ telle que, pour toute fonction f mesurable positive ou nulle sur $X \times G$, $P_r f$ est une version de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{r\lambda}[f|\mathcal{J}]$.

On définit un noyau positif M_r sur $X \times G$ par

$$(M_r f)(x, g) = (P_r(\frac{f}{r}))(x, g), \forall f \text{ mesurable positive ou nulle sur } X \times G.$$

On montre que, pour λ -presque tout $(x, g) \in X \times G$, la mesure positive $M_r((x, g), \cdot)$ sur $X \times G$ est invariante ergodique pour T_φ .

Une famille $(\mu_x)_{x \in X}$ de mesures T -quasi-invariantes σ -finies sur X définit un noyau positif σ -fini de $(X, \mathcal{B})$ dans $(X, \mathcal{B})$ si pour tout $x \in X$, μ_x est une mesure positive σ -finie sur $\mathcal{B}$ et pour tout $A \in \mathcal{B}$, l'application $x \rightarrow \mu_x(A) \in [0, +\infty]$ est $\mathcal{B}$ -mesurable.

Donnons maintenant la forme de la décomposition ergodique (dans le cas d'un groupe G abélien, avec des notations multiplicatives).

Théorème ((3.2) Décomposition ergodique de λ (cas abélien))

Une décomposition ergodique de la mesure $\lambda = \mu \otimes m_G$ est donnée par :

$$\lambda(dy, dt) = \int_{X \times G} M_r((x, g), (dy, dt)) r(x, g) \lambda(dx, dg), \quad (5)$$

où le noyau de la décomposition ergodique de λ (paramétré par (x, g)) est de la forme

$$M_r f(x, g) = \beta_r(x, g) \int_X \left(\int_H f(y, u_x(y) h g) m_H(dh) \right) \mu_x(dy), \quad (6)$$

avec la normalisation $\beta_r(x, g) = \left(\int_X \left(\int_H r(y, u_x(y) h g) m_H(dh) \right) \mu_x(dy) \right)^{-1}$.

Dans cette formule,

- $(\mu_x)_{x \in X}$ est une famille de mesures T -quasi-invariantes σ -finies sur X définissant un noyau positif σ -fini de $(X, \mathcal{B})$ dans $(X, \mathcal{B})$,
- H est un sous-groupe fermé de G ,
- $\eta : X \times G \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une application mesurable telle que, pour tout $x \in X$, $\chi_x(\cdot) := \eta(x, \cdot)$ définit une exponentielle sur H ,
- $u : X \times X \mapsto G$ une application mesurable (pour $x \in X$, on pose $u_x(\cdot) = u(x, \cdot)$).

Ces familles satisfont pour μ -p.t. $x \in X$ et tout $g \in G$:

$$\begin{aligned} \psi(y) &:= u_x(Ty)^{-1} \varphi(y) u_x(y) \in H, \text{ pour } \mu_x\text{-p.p. } y, \\ T\mu_x(dy) &= \mu_x(dy). \end{aligned}$$

Le théorème suivant montre que le cas d'un cocycle régulier fournit une "bonne" décomposition ergodique, à l'opposé du cas non régulier.

Théorème ((3.3) régulier / non régulier)

Si le cocycle (T, φ) est μ -régulier, alors toute fonction mesurable T_φ -invariante f peut s'écrire $f(x, g) = F_f((u(x))^{-1}g)$, $\mu \otimes m_G$ -p.p., où F_f est une fonction H -invariante à gauche sur G . Les composantes ergodiques de λ (cf. (6)) peuvent s'écrire:

$$M_r f(x, g) = \beta_r(x, g) \int_X \left(\int_H f(y, u(y) h (u(x))^{-1} g) dh \right) \mu(dy),$$

où $\beta_r(x, g) = \left(\int_X \left(\int_H r(y, u(y) h (u(x))^{-1} g) dh \right) \mu(dy) \right)^{-1}$.

3) Si le cocycle (T, φ) n'est pas μ_X -régulier, alors, pour μ -presque tout x , les mesures μ_x de la décomposition ergodique de $\mu \otimes m_G$ sont singulières par rapport à la mesure μ . Il en existe une infinité non dénombrable deux à deux singulières.



Aaronson (J.), An introduction to infinite ergodic theory. Mathematical Surveys and Monographs. 50. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xii, 284 p. (1997).



Conze (J.-P.), Guivarc'h (Y): Marches en milieu aléatoire et mesures quasi-invariantes pour un système dynamique, Colloq. Math. Dedicated to the memory of Anzelm Iwanik, 84/85 (2000), part 2, p.457-480.



Conze (J.-P.), Raugi (A.): On the ergodic decomposition for a cocycle, Colloquium Mathematicum. vol. 117, no 1 (2009), 121-156.



Feldman (J.), Moore (C. C.): Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. Trans. Amer. Math. Soc. 234 (1977), no. 2, 289-324.



Raugi (A.): Mesures invariantes ergodiques pour des produits gauches, Bull. Soc. Math. France 135 (2007).



Schmidt (K.): Lectures on Cocycles of Ergodic Transformations Groups, Lect. Notes in Math. vol. 1, Mac Millan Co. of India (1977).



Schmidt (K.): Unique ergodicity and related problems, Ergodic theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), p. 188-198, Lecture Notes in Math., 729, Springer, Berlin, 1979.