

G-Extensions de systèmes dynamiques en mesure infinie

III

Récurrence et ergodicité
de cocycles au-dessus de rotations de $\mathbb{T}^2$,
conditions diophantiennes,
questions.

Jean-Pierre Conze (Université de Rennes)

St Jacut
22-25 juin 2026

Plan

1 Sur la récurrence

- Exemples de cocycles récurrents sur les rotations en dimension ≥ 1
 - Exemples et contre-exemples
- Récurrence de $(S_n\varphi)$ pour $\varphi : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^d$

2 Ergodicité de (T_α, φ) pour $\varphi \in \mathcal{F}_2$

- Conditions diophantiennes

3 Nbres mal approchables et ensembles gagnants de W. Schmidt

4 Annexe: démonstrations

- Démonstration du théorème de récurrence
- Preuve de l'ergodicité de (T_α, φ)

5 Références

Une condition suffisante pour la récurrence

La question de la récurrence d'un cocycle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, est naturelle et joue un rôle clé dans la démonstration de l'ergodicité.

Considérons d'abord le cas général d'un cocycle (φ_n) engendré par une fonction $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, sur un système dynamique ergodique (M, μ, T) .

Si $d = 1$ et si φ est intégrable, une condition nécessaire et suffisante pour la récurrence de (φ_n) est $\int_M \varphi d\mu = 0$. (cf. [Atkinson1976]) Pour $d \geq 2$, la question de la récurrence est plus complexe, mais il est parfois possible de la déduire du taux de croissance du cocycle (φ_n) .

Le lemme général suivant fournit une condition suffisante simple de récurrence (cf. [Chevallier-Conze 2009]).

Lemme (1.1)

Soit (φ_n) un cocycle sur un système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. S'il existe une suite strictement croissante d'entiers (k_n) et une suite de nombres réels $(\eta_n > 0)$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x : |(S_{k_n} \varphi)(x)| \geq \eta_n\}) = 0 \text{ et } \eta_n = o(n^{1/d}), \quad (1)$$

alors le cocycle est récurrent.

En particulier, si $\varphi \in L^2(\mu)$ et $\|\varphi_n\|_2 = o(n^{\frac{1}{d}})$, le cocycle est récurrent.

Cocycles sur les rotations unidimensionnelles

Soit $\mathcal{C}$ la classe des fonctions réelles centrées à variation bornée (VB) sur $\mathbb{T}$.

Elle contient les fonctions en escalier centrées avec un nombre fini de discontinuités.

Si φ appartient à $\mathcal{C}$, ses coefficients de Fourier $c_r(\varphi)$ satisfont :

$$c_r(\varphi) = \frac{\gamma_r(\varphi)}{r}, \forall r \neq 0, \text{ avec } K(\varphi) := \sup_{r \neq 0} |\gamma_r(\varphi)| < +\infty. \quad (2)$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}$ muni de la variation $V(\varphi)$, pour une rotation T_α sur $\mathbb{T}$ et un dénominateur q quelconque de α , la somme ergodique φ_q sur T_α satisfait :

$$\|\varphi_q\|_\infty = \sup_x \left| \sum_{j=0}^{q-1} f(x + j\alpha) \right| \leq V(\varphi) \text{ (inégalité de Koksma)}. \quad (3)$$

Dans le cadre L^2 , on a : Si φ centré dans $L^2(\mathbb{T})$ satisfait (2), alors $\|\varphi_q\|_2 \leq 2\pi K(\varphi)$.

En effet, pour $\psi(x) := \{x\} - \frac{1}{2}$, on a $\|\psi_q\|_2 \leq \|\psi_q\|_\infty \leq V(\psi) = 1$, d'après (3); Par conséquent, pour φ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_q\|_2 &= \left(\sum_{r \neq 0} \frac{|\gamma_r(\varphi)|^2}{r^2} \left| \frac{\sin \pi q r \alpha}{\sin \pi r \alpha} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K(\varphi) \left(\sum_{r \neq 0} \frac{1}{r^2} \left| \frac{\sin \pi q r \alpha}{\sin \pi r \alpha} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi K(\varphi) \|\psi_q\|_2 \leq 2\pi K(\varphi). \end{aligned}$$

Lemme (1.2)

Pour tout $s > 1$, presque tout α vérifie pour une constante finie $A = A(\alpha, s)$:

$$a_n \leq A n^s, \forall n \geq 1. \quad (4)$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}$, d'après (3), on obtient une borne sur la croissance de la somme ergodique φ_n pour presque tout α :

Proposition (1.3)

Soit φ une fonction BV centrée sur $\mathbb{T}$. Si la condition (4) est satisfaite pour un certain $s \geq 0$ (condition vérifiée pour presque tout α), il existe une constante $K_s > 0$ telle que :

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq K_s (\log n)^{1+s}, \forall n \geq 2. \quad (5)$$

Lorsque α est de type 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $K(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq K(\varepsilon) n^\varepsilon, \forall n \geq 1. \quad (6)$$

Preuve Soit (q_k) le dénominateur de α . Pour $n \geq 1$, soit $m = m(n)$ l'entier tel que $n \in [q_{m(n)}, q_{m(n)+1}[$.

Comme la croissance de la suite (q_n) est au moins exponentielle, on a $m(n) = O(\log n)$. Or, (5) et (6) découlent aisément de l'inégalité de Koksma et de la α -représentation d'Ostrowski des entiers (cf. [Ostrowski 1922]) qui s'écrit :

$$\text{si } n < q_{m+1}, \quad n = \sum_{k=1}^m b_k q_k, \text{ avec } 0 \leq b_0 \leq a_1 - 1, \quad 0 \leq b_k \leq a_{k+1} \text{ pour } 1 \leq k \leq m.$$

Exemples

Pour les cocycles sur les rotations unidimensionnelles, (3) peut être utilisé pour les cocycles à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Lorsque la dimension ρ est > 1 , une estimation du taux de croissance de $\|\varphi_n\|$ peut être obtenue dans certains cas par l'analyse de Fourier sous une hypothèse sur α .

Exemple 1. (Cas $\rho = 1$) Si le cocycle (φ_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est engendré au-dessus d'une rotation unidimensionnelle par φ centrée avec des composantes BV (ou, plus généralement, satisfaisant (2)), alors il est récurrent pour toute rotation ergodique et tout $d \geq 1$ d'après l'inégalité de Koksma.

Exemple 2. (Cas produit) Soit $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ telle que φ^j , pour tout j , soit une fonction BV centrée de la variable unidimensionnelle $x_j \in \mathbb{T}$.

Dans cet exemple, l'application cylindrique sur $\mathbb{T}^\rho \times \mathbb{R}^\rho : (x, z) \rightarrow (x + \alpha, z + \varphi(x))$ est le produit des applications cylindriques sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R} : (x_i, z_i) \rightarrow (x_i + \alpha_i, z_i + \varphi^i(x_i))$. La récurrence découle alors immédiatement, pour une large classe de rotations, du lemme 1.1 et de la proposition 1.3 :

Proposition (1.4)

Si les composantes φ^j appartiennent à la classe $\mathcal{C}$ (ou, plus généralement, satisfont (2)), pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\rho)$, avec chaque α_i de type 1, le cocycle est récurrent.

Presque tout α étant de type 1, la conclusion est valable pour presque tout α . Cependant, cf. ci-dessous, pour φ dont les composantes appartiennent à $\mathcal{C}$, la récurrence peut ne pas être vérifiée en dimension ≥ 2 pour certains choix de α .

Exemple 3. *Cocycles transients sur une rotation bidimensionnelle*

Dans [Yo80], J.-C. Yoccoz a construit un cocycle transient centré défini par une fonction analytique sur une rotation bidimensionnelle particulière.

Le cocycle centré suivant est un autre exemple de cocycle transient (cf.

[Chevallier-Conze 2009, Théorème 4.1]) : Soit $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction :

$\varphi(x) = (\varphi^1(x_1), \varphi^2(x_2))$, avec $\varphi^1 = \varphi^2 = 1_{[0, \frac{1}{5}]}(\{\cdot\}) - \frac{1}{5}$. Il existe une rotation

ergodique dans $\mathbb{T}^2$, $x \rightarrow x + \alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, telle que :

$$|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi^1(x_1 + k\alpha_1)| + |\sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(x_2 + k\alpha_2)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ pour presque tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2.$$

Question : Rappelons qu'une paire $\alpha \in \mathbb{R}^2$ est singulière si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Q > 1, \forall k > Q, \exists n \leq k, d(n\alpha, \mathbb{Z}^2) \leq \varepsilon k^{-1/2}.$$

Les paires singulières, et plus généralement les vecteurs singuliers, ont été définis par Khintchine, qui a démontré que l'ensemble des vecteurs singuliers est de mesure de Lebesgue nulle.

Y. Cheung [Cheung 2011] a montré que l'ensemble des paires singulières a une dimension de Hausdorff de $4/3$, et est donc relativement petit.

Dans les exemples précédents de cocycles transients, la rotation T_α sur $\mathbb{T}^2$ s'avère être associée à une paire singulière α .

Une question naturelle est de construire un cocycle transient sur une rotation définie par une paire non singulière $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

Récurrence de $(S_n \varphi)$ pour $\varphi : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^d$

Récurrence pour $\varphi : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^d$

Pour simplifier les notations, nous traiterons le cas de fonctions définies sur $\mathbb{T}^2$. Le cas de $\mathbb{T}^\rho$ pour $\rho > 2$ serait analogue.

Rappelons la notation $|u|_+ := \max(|u|, 1)$, pour $u \in \mathbb{R}$. Si $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sont deux formes linéaires indépendantes, pour $h \in \mathbb{R}^2$, on pose

$R(h) = R_{\ell_1, \ell_2}(h) = |\ell_1(h)| + |\ell_2(h)|_+$ et on définit pour $s > 1$:

$$W(\ell_1, \ell_2, s) := \{\alpha \in \mathbb{R}^2 : R(h)^s \|h \cdot \alpha\| \leq 1 \text{ pour une infinité de } h \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Definition

On note $\mathcal{G}$ la classe des fonctions centrées $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe une partition finie de $[0, 1]^2$ en triangles Δ_j telle que f admette des dérivées partielles $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ continues et bornées sur l'intérieur de chaque Δ_j .

Théorème (1.5)

Soit $\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec $\varphi^i \in \mathcal{G}$, $i = 1, \dots, d$. Alors :

- 1) $\dim_H \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 : (T_\alpha, \Phi) \text{ n'est pas récurrent}\} \leq 2 - \frac{1}{2d-1}$;
- 2) (T_α, Φ) est récurrent si α est un couple totalement irrationnel de nombres algébriques.

Remarque : La classe $\mathcal{G}$ contient notamment les fonctions $\varphi^\Delta := 1_\Delta - \mu(\Delta)$, où 1_Δ est l'indicateur d'un polygone Δ dans le tore $\mathbb{T}^2$.

Conditions diophantiennes pour l'ergodicité

Definition

$\mathcal{F}_2$ est la classe des fonctions centrées $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ telles que, pour deux ensembles finis J_1, J_2 dépendant de φ :

$J_i = \{\beta_0^i = 0 \leq \beta_1^i < \dots < \beta_{r_i-1}^i \leq \beta_{r_i}^i = 1\}$, $i = 1, 2$, φ est C^1 sur les éléments de la partition $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\varphi$ de $[0, 1] \times [0, 1]$ en rectangles ouverts $P_{j,j'} =]\beta_j^1,$

$\beta_{j+1}^1[\times]\beta_{j'}^2, \beta_{j'+1}^2[, j = 0, \dots, r_1 - 1, j' = 0, \dots, r_2 - 1$.

De plus, nous supposons que les dérivées partielles de φ^i , $i = 1, 2$, peuvent être prolongées en fonctions continues sur l'adhérence des éléments de $\mathcal{P}_\varphi$.

Nous associons à la fonction $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{F}_2$ les quantités suivantes :

$$\lambda_1(\varphi^i) := \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1} dx, \quad \lambda_2(\varphi^i) := \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2} dx, \quad i = 1, 2.$$

Par unique ergodicité de la rotation et puisque $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2}$ sont Riemann-intégrables, on a uniformément pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$:

$$\lambda_j(\varphi^i) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(T^k(x_1, x_2)), \quad i, j = 1, 2. \quad (7)$$

Hypothèse (H) sur α et sur les discontinuités β_j^i

$$\beta_j^i - \beta_{j'}^i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i), \forall j, j' \in \{1, \dots, r_i\}, \text{ pour } i = 1, 2. \quad (8)$$

En particulier, $0 \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i)$, autrement dit α_1 et α_2 appartiennent à Bad .

On verra que

- étant donné α , avec α_1 et α_2 appartenant à Bad , l'ensemble des $(\beta_j^i, j = 1, \dots, r_i, i = 1, 2)$ satisfaisant (8) a pour dimension de Hausdorff dans $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ $r_1 + r_2$;
- étant donné $(\beta_j^i, j = 1, \dots, r_i, i = 1, 2)$, l'ensemble des α tels que la condition (H) soit vérifiée a une dimension de Hausdorff égale à 2.

Exemple Soit $\gamma_1 < \gamma_2 \in [1, 2[$. Considérons la fonction

$\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}(x_1, x_2) = \{\gamma_1 x_1\} \{\gamma_2 x_2\}$ restreinte à $[0, 1[\times [0, 1[$. Par un calcul élémentaire, on obtient

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{\gamma_1, \gamma_2} dx_1 dx_2 = \mu(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) = \left(\frac{1}{2}\gamma_1 - 1 + \gamma_1^{-1}\right) \left(\frac{1}{2}\gamma_2 - 1 + \gamma_2^{-1}\right),$$

$$\lambda_1(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) = \gamma_1 \left(\frac{1}{2}\gamma_2 - 1 + \gamma_2^{-1}\right), \quad \lambda_2(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) = \gamma_2 \left(\frac{1}{2}\gamma_1 - 1 + \gamma_1^{-1}\right).$$

Notons $\varphi^1 := \varphi_{\gamma_1, \gamma_2} - \mu(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2})$, $\varphi^2 := \varphi_{1,1} - \frac{1}{4}$. La fonction $\Phi := (\varphi^1, \varphi^2)$ est dans $\mathcal{F}_2$.

Les ensembles J_1 et J_2 de la définition de $\mathcal{F}_2$ dans 2 sont :

$$J_1 = \{\beta_0^1 = 0 < \beta_1^1 = \gamma_1^{-1} < \beta_2^1 = 1\}, \quad J_2 = \{\beta_0^2 = 0 < \beta_1^2 = \gamma_2^{-1} < \beta_2^2 = 1\}.$$

Si α_1 et α_2 appartiennent à l'ensemble *Bad*, la l'hypothèse (H) est vérifiée si γ_i est rationnel ou plus généralement si $\gamma_i^{-1} \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i)$, $i = 1, 2$.

De plus, si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ et $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \neq 1$, alors :

$$\lambda_1(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) \lambda_2(\varphi_{1,1}) - \lambda_2(\varphi_{\gamma_1, \gamma_2}) \lambda_1(\varphi_{1,1}) = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \left(1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right) \neq 0.$$

Pour tout $n \geq 1$, en écrivant les ensembles de nombres $(\{\beta_j^i - \ell \alpha_i\}, j \in J_i, 0 \leq \ell < n)$, $i = 1, 2$, comme un ensemble ordonné $(\gamma_{n,\ell}^i)_{\ell=1, \dots, p_{i,n}}$, avec $p_{i,n} = r_i n$, les atomes de

$$\mathcal{P}_\varphi^n := \mathcal{P}_\varphi \wedge T_\alpha^{-1} \mathcal{P}_\varphi \wedge \dots \wedge T_\alpha^{-(n-1)} \mathcal{P}_\varphi$$

sont les rectangles

$$R_{\ell, \ell'}^n =]\gamma_{n,\ell}^1, \gamma_{n,\ell+1}^1[\times]\gamma_{n,\ell'}^2, \gamma_{n,\ell'+1}^2[. \quad (9)$$

Pour tout $n \geq 1$, les sommes ergodiques φ_n sont de classe C^1 sur les atomes $R_{\ell, \ell'}^n$.

Nous noterons $\tilde{\mathcal{P}}_\varphi^n$ la partition $T_\alpha^n \mathcal{P}_\varphi^n$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (2.1)

Soit $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ dans $\mathcal{F}_2$. Si $x = (x_1, x_2)$ et $x + u = (x_1 + u_1, x_2 + u_2)$ appartiennent au même élément de la partition $\mathcal{P}_\varphi^n$, nous avons uniformément en x , pour $i = 1, 2$:

$$\varphi_n^i(x + u) - [\varphi_n^i(x) + (\lambda_1(\varphi^i)u_1 + \lambda_2(\varphi^i)u_2) n] = o_{n \rightarrow \infty}(n)|u| + o_{u \rightarrow 0}(u)|u| n.$$

Preuve Par hypothèse sur x et $x + u$, leurs images $T_\alpha^k x$ et $T_\alpha^k(x + u)$, pour $0 \leq k < n$, appartiennent au même rectangle $P_{j,j'}$ pour certains j, j' . Pour $i = 1, 2$, comme les dérivées partielles de φ^i peuvent être prolongées en fonctions continues sur l'adhérence de $P_{j,j'}$, par un développement de Taylor au premier ordre, on a uniformément en x :

$$\varphi^i(T_\alpha^k(x + u)) - [\varphi^i(T_\alpha^k x) + u_1 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1}(T_\alpha^k x) + u_2 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2}(T_\alpha^k x)] = o_{u \rightarrow 0}(u)|u|.$$

Il s'ensuit :

$$\varphi_n^i(x + u) - [\varphi_n^i(x) + u_1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_1}(T_\alpha^k x) + u_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_2}(T_\alpha^k x)] = o_{u \rightarrow 0}(u)|u| n.$$

En utilisant (7), on obtient le résultat. □

Théorème (2.2 ([Chevallier-Conze 2026]))

Soit $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{F}_2$ tel que :

$$\lambda_1(\varphi^1)\lambda_2(\varphi^2) - \lambda_2(\varphi^1)\lambda_1(\varphi^2) \neq 0.$$

A) Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ totalement irrationnel. Supposons (8) vérifiée par les discontinuités de φ^1, φ^2 .

Si le cocycle (T_α, φ) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ engendré par $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ au-dessus de la rotation T_α de $\mathbb{T}^2$ est récurrent, alors il est ergodique.

B) Supposons que φ^1 et φ^2 admettent des dérivées partielles continues et bornées du second ordre à l'intérieur de leur domaine de continuité.

Pour des discontinuités β_j données, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tels que le cocycle (T_α, φ) soit ergodique est de dimension de Hausdorff 2.

Exemple algébrique : Si α_1 et α_2 sont quadratiques, la récurrence découle du théorème 1.5 2). Comme α_1 et α_2 appartiennent à Bad, on obtient l'ergodicité du cocycle défini dans l'exemple 10. Ceci donne un exemple explicite de cocycle ergodique.

Sur les nombres mal approchables

Voyons comment les résultats de W. M. Schmidt [W. M. Schmidt 1966], combinés à ceux de J. Tseng [Tseng 2009] ou de M. Einsiedler et J. Tseng [Einsiedler-Tseng 2011], fournissent des informations sur les nombres "mal approchables".

Attention: la terminologie et la notation utilisées dans cette section sont celles des "jeux de Schmidt" : α est un nombre appartenant à $]0, 1[$ et θ est un nombre irrationnel.

Proposition (3.1)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel. Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \beta_i \text{ et } \beta_j - \beta_i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta), \text{ pour tout } 1 \leq i < j \leq n\}$. Alors $\dim_H \mathcal{B}_n = n$.

Preuve Nous utilisons les résultats suivants de W. M. Schmidt [W. M. Schmidt 1966] concernant les sous-ensembles α -gagnants dans $\mathbb{R}$:

- i) Si $X \subset \mathbb{R}$ est α -gagnant pour un certain $\alpha \in]0, 1[$, alors $\dim_H X = 1$.
- ii) L'image bi-lipschitzienne d'un sous-ensemble α -gagnant est α -gagnante.
- iii) Toute intersection finie ou dénombrable de sous-ensembles α -gagnants est α -gagnante.

Nous procédons par récurrence pour démontrer la proposition. On a $\mathcal{B}_1 = \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ qui est $\frac{1}{8}$ -gagnant pour tout nombre irrationnel θ , d'après un résultat de J. Tseng [Tseng 2009] ; par conséquent, $\dim_H \mathcal{B}_1 = 1$.

Supposons maintenant que $\mathcal{B}_n$ soit de dimension de Hausdorff n . Soit

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{B}_n$. Considérons l'ensemble :

$$E_\beta = \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) \cap (\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) + \beta_1) \cdots \cap (\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta) + \beta_n).$$

Si $\beta_{n+1} \in E_\beta$, alors $\beta_{n+1} \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $\beta_{n+1} - \beta_i \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$, de sorte que $(\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}) \in \mathcal{B}_{n+1}$.

D'après ii) et iii), E_β est $\frac{1}{8}$ -gagnant, ce qui implique que $\dim_H E_\beta = 1$.

D'après le corollaire 7.12 de [Falconer 1997], il s'ensuit que
 $\dim_H \mathcal{B}_{n+1} = \dim_H \mathcal{B}_n + 1 = n + 1$.

Remarque : Si $\theta \in \text{Bad}$, puisque $0 \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta)$, la même conclusion reste valable si la condition $1 \leq i < j \leq n$ est remplacée par $1 \leq i, j \leq n$.

Proposition (3.2)

Soit $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

- a) $1, \theta_1, \theta_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$,
- b) θ_1 a des quotients partiels bornés (c.-à-d., $\theta_1 \in \text{Bad}$),
- c) Les différences $\beta_j - \beta_{j'}$, $j, j' \in \{1, \dots, r\}$, appartiennent à $\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_1)$,
est gagnant et a donc une dimension de Hausdorff de 2.

Preuve D'après un résultat de M. Einsiedler et J. Tseng ([Einsiedler-Tseng 2011, Theorem 1.1]), étant donné $\beta \in \mathbb{R}$, l'ensemble des $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\beta \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_1)$ est α -gagnant, pour un certain paramètre de gain $\alpha > 0$ indépendant de β .

D'après iii), il s'ensuit que l'ensemble

$$E(\beta_1, \dots, \beta_r) = \{\theta_1 \in \mathbb{R} : \beta_j - \beta_{j'} \in \text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_1), j, j' \in \{1, \dots, r_1\}\}$$

est gagnant, ce qui implique que $E(\beta_1, \dots, \beta_{r_1}) \times \mathbb{R}$ est gagnant en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Puisque les ensembles des (θ_1, θ_2) tels que a) et b) soient vérifiés sont gagnants, ceci termine la démonstration. □

Corollaire (3.3)

Soit $\beta_1^1, \dots, \beta_{r_1}^1, \beta_1^2, \dots, \beta_{r_2}^2 \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des éléments $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

- a) $1, \theta_1, \theta_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$,
- b) θ_i, θ_2 ont des quotients partiels bornés (c.-à-d., $\theta_i \in \text{Bad}$),
- c) les différences $\beta_j^i - \beta_{j'}^i, j, j' \in \{1, \dots, r_i\}$, appartiennent à $\text{Bad}_{\mathbb{Z}}(\theta_i)$, $i = 1, 2$, est gagnant et a donc une dimension de Hausdorff de 2.

A₁ Preuve des propositions

Pour la proposition 4.2, deux lemmes sont nécessaires.

Le premier découle directement du lemme de Hausdorff-Cantelli (voir [4]). Le second lemme est adapté de Niederreiter [Niederreiter 1972].

Lemme (4.4)

Soient $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux formes linéaires indépendantes et soit $s > 1$. Alors,

$$\dim_H W(\ell_1, \ell_2, s) \leq \frac{3+s}{1+s}.$$

Preuve Etant donné $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{Z}_*^2$, l'ensemble $L(h) = \{x \in \mathbb{T}^2 : h \cdot x \in \mathbb{Z}\}$ est une union de $\text{pgcd}(h_1, h_2)$ tores unidimensionnels.

La longueur totale de $L(h)$ est la norme euclidienne $|h|$ de h .

L'ensemble $V(s, h) := \{x \in \mathbb{T}^2 : R(h)^s \|h \cdot x\| \leq 1\}$ est inclus dans une bande autour de

$L(h)$ de largeur $\frac{1}{|h|R(h)^s}$ et peut être recouvert par $n(h) = |h|^2 R(h)^s$ boules de rayon

$$r(h) = \frac{4}{|h|R(h)^s}.$$

D'après le lemme de Hausdorff-Cantelli, pour $t > 0$, si

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} n(h) r(h)^t = 4^t \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |h|^{2-t} R(h)^{s-st} < \infty,$$

alors la dimension de Hausdorff de $W(\ell_1, \ell_2, s)$ est $\leq t$.

Démonstration du théorème de récurrence

Pour $0 < t < 2$, en utilisant l'équivalence des normes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |h|^{2-t} R(h)^{s-st} &\leq C \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} (|\ell_1(h)| + |\ell_2(h)|)^{2-t} R(h)^{s-st} \\ &= C \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} (|\ell_1(h)| + |\ell_2(h)|)^{2-t} (|\ell_1(h)|_+ + |\ell_2(h)|_+)^{s(1-t)}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de majorer la série

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |\ell_i(h)|^{2-t} (|\ell_1(h)|_+ + |\ell_2(h)|_+)^{s(1-t)}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

L'ensemble $\Lambda = \{(\ell_1(h), \ell_2(h)) : h \in \mathbb{Z}^2\}$ est un treillis de $\mathbb{R}^2$.

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x_i < \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\text{card } \Lambda \cap (x + P) \leq C'$ pour une certaine constante C' , on a pour $1 < t < 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |\ell_1(h)|^{2-t} (|\ell_1(h)|_+ + |\ell_2(h)|_+)^{s(1-t)} &= \sum_{(x_1, x_2) \in \Lambda \setminus \{0\}} |x_1|^{2-t} (|x_1|_+ + |x_2|_+)^{s(1-t)} \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \sum_{(x_1, x_2) \in (\Lambda \setminus \{0\}) \cap ((n_1, n_2) + P)} |x_1|^{2-t} (|x_1|_+ + |x_2|_+)^{s(1-t)} \\ &\leq C' \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} (|n_1|_+)^{2-t} (|n_1|_+ + |n_2|_+)^{s(1-t)} = C' \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |n_1|_+^{2-t+s(1-t)} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} |n_2|_+^{s(1-t)}. \end{aligned}$$

Le produit des deux séries est fini lorsque $s(1-t) < -1$ et $2-t+s(1-t) < -1$.

Comme $s > 1$, ces conditions sont satisfaites lorsque $2 > t > \max(\frac{1+s}{s}, \frac{3+s}{1+s}) = \frac{3+s}{1+s}$.

La conclusion est la même pour $i = 2$.

Lemme (4.5)

Soient $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux formes linéaires indépendantes. Soit $s > 1$ et soit $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$ totalement irrationnel. Alors,

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h.\alpha\|^t} < \infty, \forall t \in]1, 2/s[.$$

Preuve Puisque α est totalement irrationnel et puisque $R_{\ell_1, \ell_2}(h)^s \|h.\alpha\| \leq 1$ n'admet qu'un nombre fini de solutions $h \in \mathbb{Z}^2$ pour $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $h \in \mathbb{Z}_*^2$, $R(h)^s \|h.\alpha\| \geq c$.

Estimons la somme
$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2 : |\ell_i(h)|_+ \leq n_i, i=1,2} \frac{1}{\|h.\alpha\|^t}, \text{ pour } n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2, n_1, n_2 \geq 1.$$

Remarquons que $\|x\| - \|y\| = \min(\|x - y\|, \|x + y\|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (où $\|u\| = \inf |u - n|$, pour $u \in \mathbb{R}$). Pour tout couple (h, h') tel que $h \neq h'$ et que h, h' sont dans le domaine de sommation, on a $|\ell_i(h \pm h')|_+ \leq |\ell_i(h)|_+ + |\ell_i(h')|_+ \leq 2n_i$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \||h.\alpha\| - \|h'.\alpha\|| &= \min(\|(h - h').\alpha\|, \|(h + h').\alpha\|) \\ &\geq c \min(R(h - h')^{-s}, R(h + h')^{-s}) \geq \frac{c}{(2n_1)^s (2n_2)^s}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\delta = \frac{c}{4^s} \frac{1}{n_1^s n_2^s}$, chaque intervalle $[k\delta, (k+1)\delta[$,

$k = 1, \dots, \lceil 1/\delta \rceil$ contient au plus un point $\|h.\alpha\|$ avec h appartenant au domaine de sommation.

Démonstration du théorème de récurrence

On a également $\|h.\alpha\| \geq \frac{c}{R(h)^s} \geq \frac{c}{n_1^s n_2^s}$ pour h appartenant au domaine de sommation. Puisque $t > 1$, on a :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2, |\ell_i(h)|_+ \leq n_i, i=1,2} \frac{1}{\|h.\alpha\|^t} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k\delta)^t} \leq C \frac{1}{\delta^t}.$$

En utilisant l'inégalité :

$$\sum_{(n_1, n_2): n_i \geq |\ell_i(h)|_+, i=1,2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3} \geq \frac{c'}{|\ell_1(h)|_+^2 |\ell_2(h)|_+^2} = \frac{c'}{R(h)^2},$$

satisfaite pour une certaine constante $c' > 0$, on obtient :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h.\alpha\|^t} \leq C \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{\|h.\alpha\|^t} \sum_{(n_1, n_2): n_i \geq |\ell_i(h)|_+, i=1,2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3}.$$

Ensuite, en permutant l'ordre de sommation, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h.\alpha\|^t} &\leq \frac{C}{c'} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2: |\ell_i(h)|_+ \leq n_i, i=1,2} \frac{1}{\|h.\alpha\|^t} \\ &\leq C' \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{n_1^3 n_2^3} \frac{1}{\delta^t} \leq C' \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_*^2} \frac{1}{n_1^{3-ts} n_2^{3-ts}}. \end{aligned}$$

La dernière série converge si $3 - ts > 1$, c'est-à-dire si $t < 2/s$.

Démonstration de la proposition 4.2

Soit $1 < t < 2$ et $s \in (1, 2/t)$. D'après le lemme 4.4, la dimension de Hausdorff de l'ensemble $W(\ell_1, \ell_2, s)$ est $\leq \frac{3+s}{1+s}$. D'après le lemme 4.5, si $\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty$, avec $1 < t < 2/s$, alors $\alpha \in W(\ell_1, \ell_2, s)$. Par conséquent, on a :

$$\dim_H \{ \alpha \in \mathbb{R}^2 : \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty \} \leq \inf_{1 < s < 2/t} \frac{3+s}{1+s} = \frac{3+2/t}{1+2/t}. \quad \square$$

Démonstration de la proposition 4.3 (Majoration des coefficients de Fourier)

D'après la définition de $\mathcal{G}$, il suffit de démontrer (10) lorsque la fonction f est supportée par un triangle Δ tel que f admette des dérivées partielles continues et bornées $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}$ sur l'intérieur de Δ . En utilisant des translations, des symétries autour de l'axe vertical et en coupant le triangle selon une droite verticale passant par l'un de ses sommets, on peut le réduire aux triangles $\Delta = \Delta(a, b, c)$ où $(0, 0), (a, b), (0, c)$ sont les sommets de Δ et a, b, c sont des nombres réels tels que $0 < a, c \leq 1$ et $c - 1 \leq b \leq 1$. Nous sommes donc ramenés à montrer la proposition suivante :

Proposition (4.6)

Soit f une fonction à support dans $\Delta(a, b, c)$, ayant des dérivées partielles $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}$ continues et bornées sur l'intérieur de $\Delta(a, b, c)$. Alors ses coefficients de Fourier $c_f(s, t) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-2\pi i(sx+ty)} dx dy$ satisfont, pour une constante finie K ,

$$|c_f(s, t)| \leq K \left(\frac{1}{|t|+|s|_+} + \frac{1}{|t|+|bt+as|_+} + \frac{1}{|t|+|(b-c)t+as|_+} \right), \forall s, t \in \mathbb{Z}.$$

Preuve On a

$$c_f(s, t) = \int_0^a l_t(x) e^{-2\pi i s x} dx, \text{ avec } l_t(x) = \int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x+c} f(x, y) e^{-2\pi i t y} dy.$$

Pour $t \neq 0$, l'intégration par parties donne :

$$l_t(x) = \frac{1}{-2\pi i t} [A_t(x) - B_t(x) - C_t(x)],$$

où :

$$A_t(x) = f\left(x, \frac{b-c}{a}x + c\right) e^{-2\pi i t \left(\frac{b-c}{a}x + c\right)},$$

$$B_t(x) = f\left(x, \frac{b}{a}x\right) e^{-2\pi i t \frac{b}{a}x}, \quad C_t(x) = \int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x+c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy.$$

Démonstration du théorème de récurrence

Si $t(b - c) + sa \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \int_0^a A_t(x) e^{-2\pi i s x} dx &= e^{-2\pi i t c} \int_0^a f(x, \frac{b-c}{a}x + c) e^{-2\pi i (t(\frac{b-c}{a}) + s)x} dx \\ &= \frac{a}{-2\pi i (t(\frac{b-c}{a}) + sa)} [f(a, b) e^{-2\pi i (tb + sa)} - f(0, c) e^{-2\pi i t c} \\ &\quad - e^{-2\pi i t c} \int_0^a (f'_x(x, \frac{b-c}{a}x + c) + \frac{b-c}{a} f'_y(x, \frac{b-c}{a}x + c) e^{-2\pi i (t(\frac{b-c}{a}) + s)x} dx]. \end{aligned}$$

Si $tb + sa \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^a B_t(x) e^{-2\pi i s x} dx &= \int_0^a f(x, \frac{b}{a}x) e^{-2\pi i (t\frac{b}{a} + s)x} dx \\ &= \frac{a}{-2\pi i (tb + sa)} [f(a, b) e^{-2\pi i (tb + sa)} - f(0, 0) \\ &\quad - \int_0^a (f'_x(x, \frac{b}{a}x) + \frac{b}{a} f'_y(x, \frac{b}{a}x)) e^{-2\pi i (t\frac{b}{a} + s)x} dx]. \end{aligned}$$

Si $s \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^a C_t(x) e^{-2\pi i s x} dx &= \int_0^a (\int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy) e^{-2\pi i s x} dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i s} [- \int_0^c f'_y(0, y) e^{-2\pi i t y} dy \\ &\quad - \int_0^a \frac{d}{dx} (\int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{b-c}{a}x + c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy) e^{-2\pi i s x} dx]. \end{aligned}$$

Le dernier intégrande ci-dessus est uniformément borné par rapport à t, s d'après :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{b-c}{a}x+c}^{\frac{b-c}{a}x+c} f'_y(x, y) e^{-2\pi i t y} dy \right) &= \frac{b-c}{a} f'_y(x, \frac{b-c}{a}x+c) e^{-2\pi i t (\frac{b-c}{a}x+c)} \\ &\quad - \frac{b}{a} f'_y(x, \frac{b}{a}x) e^{-2\pi i t \frac{b}{a}x} + \int_{\frac{b-c}{a}x+c}^{\frac{b-c}{a}x+c} f''_{yx}(x, y) e^{-2\pi i t y} dy. \end{aligned}$$

Le calcul précédent montre que, pour une constante finie K , si $|t| \geq 1$, $|t(b-c) + sa| \geq 1$, $|tb + sa| \geq 1$ et $|s| \geq 1$, alors

$$|c_f(s, t)| \leq \frac{K}{|t| + |t(b-c) + sa|_+} + \frac{K}{|t| + |tb + sa|_+} + \frac{K}{|t| + |s|_+}.$$

Si $t \neq 0$, puisque Les intégrales suivantes :

$$\left| \int_0^a A_t(x) e^{-2\pi i s x} dx \right|, \left| \int_0^a B_t(x) e^{-2\pi i s x} dx \right|, \left| \int_0^a C_t(x) e^{-2\pi i s x} dx \right|$$

sont bornées par une constante ne dépendant que de f .

L'inégalité ci-dessus est vérifiée de même lorsque $|t(b-c) + sa| \leq 1$, $|tb + sa| \leq 1$ ou $|s| \leq 1$.

De même, si $t = 0$ et $s \neq 0$, alors $|c_f(s, 0)| \leq \frac{K}{|s|_+}$, pour une constante K .

Démonstration du théorème de récurrence 1.5

1) Avec $\varphi = \varphi_i$, soient $\ell_1^\varphi, \dots, \ell_{2m}^\varphi$ les formes linéaires données par la proposition 4.3. Soit $0 < t < 2$. Si α n'appartient pas à l'ensemble

$$E_\varphi^t := \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^2 : \sum_{k=1}^m \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{(|\ell_{2k-1}^\varphi(h)|_+ + |\ell_{2k}^\varphi(h)|_+)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} = \infty \right\},$$

alors par (10)

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{|c_h(\varphi)|^2}{\|h \cdot \alpha\|^t} &\leq C^2 \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{(|\ell_{2k-1}^\varphi(h)|_+ + |\ell_{2k}^\varphi(h)|_+)^2} \right) \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^t} \\ &\leq C^2 m \sum_{k=1}^m \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{(|\ell_{2k-1}^\varphi(h)|_+ + |\ell_{2k}^\varphi(h)|_+)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} < \infty. \end{aligned}$$

Puisque φ est centrée, on a

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(\cdot + k\alpha)\|_2^2 &= \|\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} c_h(\varphi) e^{2i\pi \langle h, (\cdot + k\alpha) \rangle}\|_2^2 \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |c_h(\varphi)|^2 \|\sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k \langle h, \alpha \rangle}\|_2^2 \leq \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |c_h(\varphi)|^2 \inf(N, \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|})^2 \\ &\leq \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} |c_h(\varphi)|^2 (N^{1-t/2} \frac{1}{\|h \cdot \alpha\|^{t/2}})^2 \leq N^{2-t} \sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{|c_h(\varphi)|^2}{\|h \cdot \alpha\|^t}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si $2 - \frac{2}{d} < t < 2$ et $\alpha \notin \cup_{i=1}^d E_{\varphi_i}^t$, alors

$\|\sum_{k=0}^{N-1} \Phi(\cdot + k\alpha)\|_2^2 = O(N^{2-t}) = o(N^{\frac{2}{d}})$, ce qui implique que le cocycle $(\Phi_{n,\alpha})_n$ est récurrent d'après le lemme 1.1.

Par conséquent, si $\alpha \notin \bigcap_{2-\frac{2}{d} < t < 2} \bigcup_{i=1}^d E_{\varphi_i}^t$, (T_α, Φ) est récurrent.

Enfin, d'après la proposition 4.2,

$$\dim_H\left(\bigcap_{2-\frac{2}{d}<t<2}\bigcup_{i=1}^d E_{\varphi_i}^t\right)\leq\inf_{2-\frac{2}{d}<t<2}\frac{3+2/t}{1+2/t}=\frac{3+2/(2-\frac{2}{d})}{1+2/(2-\frac{2}{d})}=2-\frac{1}{2d-1}.$$

2) Si α est algébrique, d'après le théorème de W. Schmidt [Théorème 2][W. M. Schmidt 1970] sur l'approximation simultanée des nombres algébriques par des rationnels, $\alpha \notin W(\ell_1, \ell_2, s)$ pour $s = 1 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 4.5, ceci entraîne :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_*^2} \frac{1}{R(h)^2 \|h \cdot \alpha\|^t} < \infty, \forall t \in]1, \frac{2}{1+\varepsilon}[$$

et, comme précédemment, en prenant ε suffisamment petit, on obtient la récurrence en toute dimension d d'après le lemme 1.1.

Preuve de l'ergodicité de (T_α, φ)

Dans la démonstration de l'ergodicité, nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemme ((4.3) [K. Schmidt 1977], Proposition 3.8)

Si $K \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble compact tel que $K \cap \mathcal{E}(\varphi) = \emptyset$, il existe un ensemble B de mesure positive tel que $\mu(B \cap T^{-n}B \cap (\varphi_n \in K)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Lemme ((4.4))

Sous l'hypothèse (H) , il existe deux constantes $0 < c \leq c'$ telles que :

$$\frac{c}{n} \leq \gamma_{n,\ell+1}^1 - \gamma_{n,\ell}^1 \leq \frac{c'}{n}, \forall n \geq 1, \ell = 1, \dots, p_{1,n}. \quad (11)$$

(A₂ Preuve du lemme 4.3)

L'hypothèse implique l'existence, pour tout $z \in K$, d'un sous-ensemble B_z de mesure positive dans X et d'un voisinage U_z de l'origine tels que :

$$\varphi_n^{B_z}(x) \notin U_z + z, \forall n \geq 0, \forall x \in B_z.$$

Pour tout $z \in K$, soit V_z un voisinage de l'origine tel que $V_z + V_z \subset U_z$. Par compacité de K , il existe un nombre fini de points $z_1, \dots, z_\ell$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^\ell (V_{z_i} + z_i)$.

Supposons que, pour $r < \ell$, nous ayons construit un sous-ensemble D_{r-1} de mesure positive tel que les valeurs du cocycle $(\varphi_{D_{r-1}}^n)$ n'appartiennent jamais à $V_{z_i} + z_i$, pour $i = 1, \dots, r-1$. Nous allons construire $D_r \subset D_{r-1}$ de mesure positive tel que les valeurs de $(\varphi_{D_r}^n)$ n'appartiennent jamais à $V_{z_r} + z_r$.

Par ergodicité de T , il existe $k \geq 1$ et $D' \subset D_{r-1}$ de mesure positive tels que $T^k D' \subset B_{z_r}$. D'après le théorème de Lusin, il existe un sous-ensemble D_r de D' de mesure positive tel que $\varphi_k(x) - \varphi_k(y) \in V_{z_r}, \forall x, y \in D_r$.

Pour $k, n \geq 0$, la relation de cocycle $\varphi_n(x) = \varphi_k(x) + \varphi_n(T^k x) - \varphi_k(T^n x)$ est vérifiée.

Par conséquent, si $x, T^n x \in D_r$, alors $\varphi_k(T^n x) - \varphi_k(x) \in V_{z_r}$, d'où $\varphi_n(T^k x) \in V_{z_i} + \varphi_n(x)$.

Comme $T^k x, T^{k+n} x \in B_{z_r}$, de plus $\varphi_n(T^k x)$ est une valeur du cocycle induit $\varphi_{B_{z_r}}^n$ et donc $\notin U_{z_r} + z_r$.

Il s'ensuit que $\varphi_n(x) \notin V_{z_r} + z_r$, car sinon, $\varphi_n(T^k x) \in V_{z_r} + V_{z_r} + z_r \subset U_{z_r} + z_r$, ce qui est contradictoire. Nous concluons que $\varphi_{D_r}^n$ ne prend jamais ses valeurs dans $V_{z_r} + z_r$.

De plus, puisque D_r est un sous-ensemble de D_{r-1} , les valeurs du cocycle induit $(\varphi_{D_r}^n)$ sont incluses dans celles de $(\varphi_{D_{r-1}}^n)$, et n'appartiennent donc jamais à $V_{z_i} + z_i$, pour $i = 1, \dots, r-1$.

Par conséquent, D_r possède la propriété souhaitée. Par récurrence sur r , il s'ensuit qu'il existe un ensemble D_ℓ tel que les valeurs de $(\varphi_{D_\ell}^n)$ n'appartiennent jamais à $V_{z_i} + z_i$, pour $i = 1, \dots, \ell$.

Comme $K \subset \bigcup_{i=1}^\ell (V_{z_i} + z_i)$, les valeurs de $(\varphi_{D_\ell}^n)$ n'appartiennent jamais à K et $B := D_\ell$ satisfait l'énoncé du lemme. □

(Preuve du lemme 4.4)

D'après (H), il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $j, j' \in \{1, \dots, r_1\}$ et tous $k \in \{1, \dots, n\}$, $\|k\alpha_1 - (\beta_j^1 - \beta_{j'}^1)\| \geq \frac{c}{n}$.

Par conséquent, pour tout $1 \leq j, j' \leq r_1$ et tout $0 \leq k, k' \leq n$, si $\beta_j + k\alpha_1 \not\equiv \beta_{j'} + k'\alpha_1 \pmod{\mathbb{Z}}$, alors

$$\|\beta_j + k\alpha_1 - (\beta_{j'} + k'\alpha_1)\| \geq \min\left(\frac{c}{n}, \delta\right) \geq \frac{\min(c, \delta)}{n}, \text{ avec } \delta = \min_{j \neq j'} \|\beta_j - \beta_{j'}\|.$$

Pour le membre de droite de (11), il suffit de montrer que, pour tout entier positif q , le plus grand écart dans $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, q\alpha_1\}$ est au plus $\frac{c'}{q}$ pour une certaine constante c' .

Premièrement, avec $j = j'$, on obtient que $\|n\alpha_1\| \geq \frac{c}{n}$, pour tout $n \geq 1$.

Ensuite, soit $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 0}$ la suite des convergents de α_1 . Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_{n+1}|q_n\alpha_1 - p_n| = q_{n+1}\|q_n\alpha_1\| \leq 1 \text{ et } q_n\|q_n\alpha_1\| \geq c, \text{ on a : } \frac{q_{n+1}}{q_n} \leq \frac{1}{c} \text{ et}$$

$$|k\frac{p_n}{q_n} - k\alpha_1| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq q_n.$$

Cela implique que l'écart maximal dans $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, q_n\alpha_1\}$ est au plus égal à $\frac{1}{q_n} + \frac{2}{q_{n+1}} \leq \frac{3}{q_n}$. Par conséquent, pour tout $q_n \leq q \leq q_{n+1}$, l'écart maximal dans $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, q\alpha_1\}$ est au plus égal à $\frac{3}{q_n} \leq \frac{3}{cq}$. □

Preuve du théorème 2.2

A) D'après le lemme 4.4, l'hypothèse (H) implique l'existence de deux constantes positives c et c' telles que :

$$\frac{c}{n} \leq \gamma_{n,\ell+1}^i - \gamma_{n,\ell}^i \leq \frac{c'}{n}, \quad \ell = 1, \dots, |J^i|n, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Pour $x \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus \bigcup_k \partial \mathcal{P}_\varphi^k$, notons $R_n(x)$ l'élément de la partition $\mathcal{P}_\varphi^n$ contenant x . et $\tilde{R}_n(x)$ l'élément de la partition $\tilde{\mathcal{P}}_\varphi^n$ contenant x .

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $u = (u_1, u_2)$ tels que x et $x + u$ appartiennent au même élément de la partition $\mathcal{P}_\varphi^n$.

On pose $M = \begin{pmatrix} \lambda_1(\varphi^1) & \lambda_2(\varphi^1) \\ \lambda_1(\varphi^2) & \lambda_2(\varphi^2) \end{pmatrix}$ et $u^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Puisque $|u| = O(\frac{1}{n})$ d'après le lemme 2.1 et (12), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε^1 ne dépendant que de φ et ε tel que :

$$|\varphi_n(x + u) - [\varphi_n(x) + nMu^t]| \leq \varepsilon, \text{ pour } n > n_\varepsilon. \quad (13)$$

Par conséquent, pour $n > N_\varepsilon^1$,

$$|\varphi_n(x + u) - nMu^t| \leq \varepsilon + |\varphi_n(x)|. \quad (14)$$

Rappelons que c et c' sont définies dans (12). La matrice M est inversible d'après l'hypothèse du théorème.

Pour $c_0 = \frac{1}{2}c$, l'image par M du carré $Q = [0, c_0] \times [0, c_0]$ est un parallélogramme $\mathcal{L}_0$ dont un sommet est à l'origine.

Supposons que $\mathcal{E}(\varphi) \neq \mathbb{R}^2$. D'après la forme des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^2$, il existe une boule ouverte U de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^2$, dont l'adhérence, le compact $K = \overline{U}$, est contenue dans $\mathcal{L}_0$ et est disjointe de $\mathcal{E}(\varphi)$.

Pour une constante $c_1 > 0$, on a $\lambda(U) \geq c_1\lambda(\mathcal{L}_0)$. Soit $U_0 \subset U$ la boule de rayon $r - 2\varepsilon$ de même centre que U . On choisit ε suffisamment petit pour que $\lambda(U_0) \geq \frac{1}{2}c_1\lambda(\mathcal{L}_0)$ et $\frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2 > 2\varepsilon$.

Preuve de l'ergodicité de (T_α, φ)

Pour conclure la démonstration du théorème par l'absurde il suffit de montrer que K contient une valeur essentielle de φ .

Supposons que, au contraire, $K \cap \mathcal{E}(\varphi) = \emptyset$. D'après le lemme 4.3, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(B) > 0$ et

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap (\varphi_n \in K)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Par le théorème de densité de Lebesgue appliqué à pour B , on obtient :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon^2 \geq 1$ et un ensemble de mesure positive $B_\varepsilon \subset B$ tels que :

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(u)) \geq (1 - 2\varepsilon)\mu(R_n(u)), \forall u \in B_\varepsilon \cap T^{-n}B_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon^2 \quad (16)$$

La récurrence de (φ_n) implique qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq N_\varepsilon^2$ tels que :

$$\mu(B_\varepsilon \cap T_\alpha^{-n}B_\varepsilon \cap (|\varphi_n| < \varepsilon)) > 0. \quad (17)$$

Par conséquent, on peut choisir $n \geq \sup(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$ et $x^0 \in \mathbb{T}^2$ tels que $|\varphi_n(x^0)| < \varepsilon$ et $x^0 \in B_\varepsilon \cap T^{-n}B_\varepsilon$, ce qui implique, d'après (16) :

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(x^0)) \geq (1 - 2\varepsilon)\mu(R_n(x^0)). \quad (18)$$

On peut supposer que x^0 , appartenant à $R_n(x^0)$, est l'un des sommets d'un carré $Q_n \subset R_n(x^0)$ de côté $\frac{c_0}{n} \times \frac{c_0}{n}$.

A un changement de signe près de u_1, u_2 , on peut également supposer que x^0 est le coin inférieur gauche.

D'après la définition de $\mathcal{L}$, donnée au début de la démonstration, $nM(Q_n - x^0) = \mathcal{L}_0$ et la mesure de l'ouvert $W = (nM)^{-1}U_0 + x^0$ vérifie

$$\mu(W) = \mu(Q_n) \frac{\lambda(U_0)}{\lambda(\mathcal{L}_0)} \geq \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{c_0}{c'}\right)^2 \mu(R_n(x^0)) \text{ (voir (12)).}$$

Rappelons que ε est tel que $\frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2 - 2\varepsilon > 0$.

Il est clair que $W \subset Q_n \subset R_n(x^0)$. De plus, puisque $|\varphi_n(x^0)| < \varepsilon$, d'après (14), on a :

$$\begin{aligned} W = \{x : nM(x - x^0) \in U_0\} &\subset \{x : d(\varphi_n(x), U_0) \leq 2\varepsilon\} \\ &\subset \{x : \varphi_n(x) \in U\} \subset \{x : \varphi_n(x) \in K\}. \end{aligned}$$

Observons que pour trois ensembles E_1, E_2, E_3 ,

$$\mu(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \geq \mu(E_1 \cap E_2) - \mu(E_2) + \mu(E_2 \cap E_3).$$

En utilisant (18), il s'ensuit, avec $E_1 = B \cap T^{-n}B$, $E_2 = R_n(x^0)$, $E_3 = W$:

$$\begin{aligned} \mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(x^0) \cap \{x : \varphi_n(x) \in K\}) &\geq \mu(B \cap T^{-n}B \cap R_n(x^0) \cap W) \\ &\geq (1 - 2\varepsilon) \mu(R_n(x^0)) - \mu(R_n(x^0)) + \mu(R_n(x^0) \cap W) \\ &\geq (\frac{1}{2}c_1(\frac{c_0}{c'})^2 - 2\varepsilon) \mu(R_n(x^0)) > 0. \end{aligned}$$

Ceci contredit (15) et conclut la démonstration de A).

B) Si (φ^1, φ^2) appartient à $\mathcal{F}_2$ et satisfait également l'hypothèse de B), alors φ^1 et φ^2 appartiennent à $\mathcal{G}$ (cf. Définition 1).

D'après le théorème 1.5, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tels que le cocycle (φ_n) ne soit pas récurrent a une dimension de Hausdorff $\leq 2 - 1/3$.

Soit B son complémentaire (c'est-à-dire l'ensemble des α tels que (Φ_n) soit récurrent). Etant donné les discontinuités β_j , l'ensemble A des α tel que la condition (8) de (H) soit satisfaite a une dimension de Hausdorff de 2 d'après le corollaire 3.3. Par conséquent, la dimension de Hausdorff¹ de $A \cap B$ est égale à 2.

D'après A), l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tels que le cocycle (φ_n) soit ergodique a une dimension de Hausdorff de 2. □

¹Pour les ensembles A et B , on a : $2 = \dim_H A \leq \max(\dim_H(A \cap B), \dim_H(A \cap B^c)) \leq \max(\dim_H(A \cap B), \dim_H(B^c)) \leq \max(\dim_H(A \cap B), 2 - 1/3)$; Par conséquent, $\dim_H(A \cap B) = 2$ ▶



G. Atkinson: Recurrence of co-cycles and random walks, J. London Math. Soc. (2) 13 (1976), no. 3, 486-488.



V. I. Bernik, M. M. Dodson: *Metric Diophantine approximation on manifolds*, Cambridge Tracts in Mathematics 137, Cambridge University Press 1999



Y. Cheung: Hausdorff dimension of the set of singular pairs, Annals of Math. (2) 173 (2011), no. 1, 127-167.



N. Chevallier, J.-P. Conze: Examples of recurrent or transient stationary walks in $\mathbb{R}^d$ over a rotation of $\mathbb{T}^2$, Contemporary Mathematics, vol. 485 AMS, Providence, RI, 2009, p. 71-84.



N. Chevallier and J.-P. Conze: Ergodicity of cocycles over 2-dimensional rotations, Studia Mathematica (2026)



J.-P. Conze: Recurrence, ergodicity and invariant measures for cocycles over a rotation, Contemporary Mathematics, vol. 485, AMS, Providence, RI, 2009, p. 45-70.



M. Einsiedler, J. Tseng: Badly approximable systems of affine forms, fractals, and Schmidt games, J. Reine Angew. Math. 660 (2011), 83-97.



K. Falconer: *Fractal geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley 1997.



H. Niederreiter: On a number-theoretical integration method, *Aequa. Math.*, 8 (1972), 304-311.



A. Ostrowski: Zu meiner Note: "Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen" im I. Heft dieses Bandes *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 1 (1922), no. 1, 249-250.



K. Schmidt: *Cocycle of Ergodic Transformation Groups*, Lect. Notes in Math (Vol. 1) Mac Milan Co. of India, 1977.



W. M. Schmidt: On badly approximable numbers and certain games, *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966) 178-199.



W. M. Schmidt: Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* 125 (1970), 189-201.



W. M. Schmidt: Two questions in Diophantine approximation, *Monatsh. Math.* 82 (1976), no.3, 237-245.



J. Tseng: Badly approximable affine forms and Schmidt games, *J. Number Theory* 129 (2009), p. 3020-3025.



J.-C. Yoccoz: Sur la disparition de propriétés de type Denjoy-Koksma en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 291 (1980), no. 13.